СЕМИНАР 5

Модели, описываемые системами двух автономных дифференциальных уравнений. Исследование нелинейных систем второго порядка. Модель Лотки. Модель Вольтерры.

В общем виде модели, описываемые системами двух автономных дифференциальных уравнений, можно записать как

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

Исследование нелинейных систем второго порядка будем проводить по следующему общему плану.

1. Находим стационарные состояния $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$, $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)\ldots$ $(\overline{x}_n, \overline{y}_n)$ системы двух автономных дифференциальных уравнений, приравнивая производные и, как следствие, правые части уравнений к нулю:

$$\begin{cases} P(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \\ Q(\overline{x}, \overline{y}) = 0. \end{cases}$$

2. Линеаризуем уравнения вблизи каждого стационарного состояния, находим коэффициенты линеаризации:

$$a = P'_x(\overline{x}, \overline{y}), \quad b = P'_y(\overline{x}, \overline{y}),$$
$$c = Q'_x(\overline{x}, \overline{y}), \quad d = Q'_y(\overline{x}, \overline{y}).$$

3. Записываем характеристическое уравнение для линеаризованной вблизи каждого стационарного состояния системы:

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

4. Находим корни характеристического уравнения (либо используем бифуркационную диаграмму) и определяем тип фазового портрета вблизи каждого стационарного состояния:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}\right).$$

5. Строим общий фазовый портрет, объединяя на одной фазовой плоскости фазовые портреты каждого из найденных стационарных состояний (см. семинар 4).

МОДЕЛЬ ЛОТКИ

Пусть в некотором объеме находится в избытке вещество ***A***. Молекулы ***A*** с некоторой постоянной скоростью k_0 превращаются в молекулы вещества ***X*** (реакция нулевого порядка) (рис. 5.1).

$$\to A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{k_2} B$$

Рис. 5.1. Схема химической реакции в модели, предложенной А. Лоткой

Вещество ***X*** может превращаться в вещество ***Y*** с константой скорости k_1, причем скорость этой реакции тем больше, чем больше концентрация вещества ***Y*** (реакция второго порядка). В схеме это отражено обратной стрелкой над символом ***Y***. Молекулы ***Y***, в свою очередь, необратимо распадаются с константой k_2, в результате образуется вещество ***B***.

Для независимых переменных ***X*** и ***Y*** запишем систему уравнений, описывающих реакцию, представленную на рис. 5.1:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y. \end{cases} \tag{5.1}$$

Исследуем систему в соответствии с приведенным выше планом.

1. Стационарное решение системы (5.1) получим, приравнивая правые части уравнений к нулю:

$$\begin{cases} k_0 - k_1 xy = 0, \\ k_1 xy - k_2 y = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Стационарное состояние системы единственно. Координаты особой точки:

$$\bar{x} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{y} = \frac{k_0}{k_2}.$$

2. Линеаризуем уравнения вблизи найденного стационарного состояния. Частные производные правых частей уравнений системы (5.1):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -k_1\bar{y} = -\frac{k_1 k_0}{k_2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -k_1\bar{x} = -k_2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k_1\bar{y} = \frac{k_1 k_0}{k_2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = k_1\bar{x} - k_2 = 0.$$

3. Запишем характеристическое уравнение для линеаризованной системы:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{k_1 k_0}{k_2} - \lambda & -k_2 \\ \dfrac{k_1 k_0}{k_2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

или

$$\lambda^2 + \lambda\frac{k_1 k_0}{k_2} + k_0 k_1 = 0.$$

4. Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right].$$

При $\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 < 4k_0 k_1$ (или $k_2 > \frac{\sqrt{k_0 k_1}}{2}$) особая точка — устойчивый фокус, имеют место затухающие колебания.

При $\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 > 4k_0 k_1$ (или $k_2 < \frac{\sqrt{k_0 k_1}}{2}$) особая точка — устойчивый узел, имеет место монотонное приближение к стационарному состоянию.

5. Изоклины горизонтальных касательных находим из уравнения $k_1 xy - k_2 y = 0$: $y = 0$, $x = \frac{k_2}{k_1}$.

Изоклину вертикальных касательных находим из уравнения $k_0 - k_1 xy = 0$: $y = \frac{k_0}{k_1 x}$.

Задание 5.1

5.1.1. Исследуйте модель Лотки при следующих наборах параметров: 1) $k_0 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$; 2) $k_0 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$.

5.1.2. Для построения фазового портрета, исходя из рассчитанных стационарных состояний, определите примерный масштаб осей *OX* и *OY* (в качестве минимальных значений можно взять нулевые значения, в качестве максимальных значений — удвоенные стационарные значения). Введите *исходные нелинейные уравнения* модели Лотки (5.1) в программу для решения ОДУ. Для каждого из заданных наборов параметров постройте фазовые и кинетические портреты.

5.1.3. Введите *линеаризованные уравнения* модели Лотки (5.3) в программу решения ОДУ. Для каждого из заданных наборов параметров постройте фазовые портреты и сравните с фазовыми портретами нелинейной системы Лотки (5.1). Сравните расположение фазовых траекторий вблизи и вдали от стационарной точки.

МОДЕЛЬ ВОЛЬТЕРРЫ

Рассмотрим ***модель «хищник-жертва»,*** которая впервые была предложена В. Вольтеррой для объяснения периодических изменений числа особей.

Пусть в некотором ограниченном ареале живут хищники и жертвы, например зайцы и волки. Зайцы питаются растительной пищей, имеющейся всегда в достаточном количестве. Волки могут питаться лишь зайцами. Обозначим число зайцев (жертв) как x, а число волков (хищников) — как y. Так как количество пищи у зайцев неограниченно, мы можем предположить, что они размножаются со скоростью, пропорциональной их числу — $\varepsilon_x x$.

Если рождаемость зайцев превышает их смертность, то $\varepsilon_x > 0$. Выражение $\varepsilon_x x$ соответствует *автокаталитической реакции* первого порядка.

Пусть убыль зайцев пропорциональна вероятности встречи зайца с волком, т. е. пропорциональна произведению численностей xy, коэффициент пропорциональности — γ_{xy}. Можно предположить, что количество волков нарастает тем быстрее, чем чаще происходят их встречи с зайцами, а именно пропорционально xy, коэффициент пропорциональности — γ_{yx}.

Кроме того, имеет место процесс естественной смертности волков, причем скорость смертности пропорциональна их количеству, коэффициент пропорциональности — ε_y.

Эти рассуждения приводят к формулировке классической *вольтерровской* системы уравнений, описывающей изменения численности жертв x и хищников y:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x), \end{cases} \tag{5.4}$$

где ε_x, ε_y, γ_{xy}, γ_{yx} — константы соответствующих скоростей.

Будем исследовать систему в соответствии с приведенным ранее планом.

1. Стационарные решения системы (5.4) получим, приравнивая правые части уравнений к нулю: $x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y) = 0$, $-y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x) = 0$	
$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{y}_1 = 0$	$\bar{x}_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}$, $\bar{y}_2 = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$
2. Линеаризуем систему (5.4) вблизи каждого стационарного состояния: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon_x - \gamma_{xy}\bar{y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\gamma_{xy}\bar{x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \gamma_{yx}\bar{y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\varepsilon_y + \gamma_{yx}\bar{x}$	
$\dfrac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon_x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\varepsilon_y$ (5.5)	$\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\varepsilon_y \gamma_{xy}}{\gamma_{yx}}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\varepsilon_x \gamma_{yx}}{\gamma_{xy}}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ (5.6)
3. Характеристические уравнения для линеаризованных систем с коэффициентами (5.5) и (5.6) имеют следующий вид:	
$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \lambda & 0 \\ 0 & -\varepsilon_y - \lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^2 - \lambda(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$	$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{\varepsilon_y \gamma_{xy}}{\gamma_{yx}} \\ \dfrac{\varepsilon_x \gamma_{yx}}{\gamma_{xy}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$

<table>
<tr><td colspan="2">4. Для определения типа стационарного состояния вспомним бифуркационную диаграмму для уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$ (семинар 4)</td></tr>
<tr><td>$\sigma = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$, $\Delta = -\varepsilon_x \varepsilon_y$.
$\Delta < 0$, особая точка — седло.
$\lambda_{1,2}$ действительные, разных знаков</td><td>$\sigma = 0$, $\Delta = \varepsilon_x \varepsilon_y$.
$\sigma = 0$, $\Delta > 0$,
особая точка — центр.
$\lambda_{1,2}$ чисто мнимые</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Изоклины горизонтальных касательных находим из уравнения $-y(\varepsilon_y - \gamma_{yx}x) = 0$: $y = 0$, $x = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}$.
Изоклины вертикальных касательных находим из уравнения $x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y) = 0$: $x = 0$, $y = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$</td></tr>
<tr><td>6. Уравнения сепаратрис:
$x = 0$, $y = 0$</td><td></td></tr>
</table>

Особая точка типа *центр* устойчива по Ляпунову, но *не асимптотически*.

Пусть в системе происходят колебания с некой амплитудой. Если дать небольшое отклонение и предоставить систему самой себе, то в системе возникнут колебания с новой постоянной амплитудой. Заданное отклонение нарастать не будет, однако и в исходное состояние система не вернется. В отсутствие других воздействий новые характеристики системы могут бесконечно долго сохраняться неизменными.

Задание 5.2

5.2.1. Исследуйте модель Вольтерры при следующих значениях параметров: $\varepsilon_x = 2$, $\varepsilon_y = 2$, $\gamma_{xy} = 4$, $\gamma_{yx} = 4$.

5.2.2. Для построения фазового портрета, исходя из рассчитанных стационарных состояний, определите примерный масштаб осей OX и OY (в качестве минимальных значений можно взять нулевые значения, в качестве максимальных значений — удвоенные стационарные значения). Постройте на фазовой плоскости изоклины горизонтальных и вертикальных касательных (нуль-изоклины) и сепаратрисы.

5.2.3. Введите *исходные нелинейные уравнения* модели Вольтерры (5.4) в программу решения ОДУ, постройте фазовый и кинетический портреты с учетом всех найденных стационарных точек. Зарисуйте эскиз фазового портрета с учетом нуль-изоклин. Рядом с фазовым портретом зарисуйте кинетическую кривую, соответствующую ненулевому стационарному состоянию.

5.2.4. Введите *линеаризованные уравнения* модели Вольтерры (5.5) и (5.6) в программу решения ОДУ, постройте фазовые портреты и сравните с фазовым портретом нелинейной системы Вольтерры. Сравните расположение фазовых траекторий вблизи и вдали от стационарных точек.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сколько стационарных состояний в модели Лотки? Какова их устойчивость?
2. Как зависит характер особой точки от скорости распада вещества $\boldsymbol{Y}$?
3. Сколько стационарных состояний в модели Вольтерры? Какова их устойчивость?
4. Являются ли устойчивыми колебания в модели Вольтерры? Почему?
5. Как соотносятся пики численности хищников и жертв на кинетических кривых?
6. Чем отличается динамика колебаний в модели Вольтерры от колебаний в модели Лотки?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 5

5.1. Модель выбора одного из равноправных видов может описываться уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay - xy, \end{cases}$$

где a — коэффициент размножения каждого из видов, $a = 2$.

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого из найденных стационарных состояний.

Постройте фазовый портрет системы: а) постройте главные изоклины системы; б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости; в) постройте, где необходимо, сепаратрисы; г) постройте фазовые траектории и стрелками укажите их направление.

5.2. Модель конкуренции равноправных видов в безразмерных переменных может быть описана системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - by - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 - bx - y). \end{cases}$$

Здесь коэффициент b показывает, во сколько раз отличаются скорости межвидовой и внутривидовой конкуренции.

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого найденного стационарного состояния в зависимости от b (рассмотрите при $b \neq 1$).

Постройте фазовые портреты системы при $b = 2$ (межвидовая конкуренция в 2 раза превышает внутривидовую) и при $b = 0{,}5$ (внутривидовая конкуренция в 2 раза превышает межвидовую):

а) постройте главные изоклины системы;

б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости;

в) постройте, где необходимо, сепаратрисы, укажите области (выше или ниже сепаратрис) притяжения устойчивых состояний;

г) постройте фазовые траектории и стрелками укажите их направление для каждого фазового портрета.

5.3. Для каждого из вариантов задачи 5.2 постройте фазопараметрическую диаграмму — зависимость координаты стационарного состояния от параметра b в диапазонах $0 < b < 1$, $1 < b < 2$.

Для этого

а) рассмотрите зависимость координат каждого из стационарных состояний от параметра b (из рассмотрения можно исключить состояние, в котором численность обоих видов равна нулю);

б) рассчитайте $\bar{x}$ и $\bar{y}$ для нескольких значений параметров b из заданного диапазона (для каждого стационарного состояния должен получиться ряд последовательных значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в зависимости от b);

в) соедините сплошной линией устойчивые состояния и пунктирной — неустойчивые.

При каком соотношении межвидовой и внутривидовой конкуренции наблюдается сосуществование видов, а при каких условиях выживает только один из видов (триггер)?