Семинар 1

Дифференциальное уравнение первого порядка. Фазовое пространство. Стационарное состояние. Устойчивость стационарного состояния по Ляпунову. Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния. Аналитический метод определения устойчивости. Графический метод определения устойчивости.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{1.1}$$

где время t — ***независимая переменная***, величина $x(t)$ — ***зависимая переменная***, а **порядок уравнения** определяется как наивысший порядок производной функции $x(t)$.

Уравнение вида (1.1) задает широкий класс ***моделей в биологии***, описываемых одним дифференциальным уравнением.

Входящие в модель коэффициенты, обеспечивающие ее адекватность моделируемой системе, называются ***параметрами*** модели.

Значение переменной в начальный момент времени $x\big|_{t=0} = x_0$ определяет ***начальное состояние*** модели, или ***начальное условие*** уравнения (1.1).

Дифференциальное уравнение называется ***автономным***, если его правая часть не зависит явно от времени:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.2}$$

Любая непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.2), является ***решением*** этого уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка (1.2) называется ***линейным***, если его правая часть имеет вид $f(x) = c_1 x + c_2$, где коэффициенты (параметры) c_1 и c_2 принимают любые действительные значения. В противном случае уравнение называют ***нелинейным***.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Фазовое пространство — это пространство ***зависимых переменных*** (***фазовых переменных***), в котором представлено множество всех состояний моделируемой системы.

Состояние системы в фазовом пространстве в некоторый момент времени представляет собой ***изображающую точку***.

Изменение состояния системы во времени можно представить как движение ***изображающей точки*** вдоль некоторой траектории в фазовом пространстве, которая называется ***фазовой траекторией***.

Для одного дифференциального уравнения фазовое пространство представляет собой одну координатную ось.

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ
(ТОЧКА ПОКОЯ, ОСОБАЯ ТОЧКА, СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ)

В ***стационарном состоянии*** значения переменных в системе не меняются со временем, то есть скорость изменения переменной $x(t)$ равна нулю:

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{1.3}$$

Тогда для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x)$ имеем

$$f(x) = 0. \tag{1.4}$$

Корни алгебраического уравнения (1.4) $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ являются ***стационарными состояниями*** уравнения $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$.

Задание 1.1

Найдите стационарные состояния следующих уравнений:

а) $\dfrac{dx}{dt} = V - kx$,

б) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - rx + m$,

в) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\beta + \tau x}(x - L)(x - K)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Стационарное состояние $\bar{x}$ ***устойчиво по Ляпунову***, если, задав любое сколь угодно малое положительное ε, всегда можно найти такое δ, что

$$|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon \text{ для } t_0 \le t < +\infty, \text{ если } |x(t_0) - \bar{x}| < \delta.$$

Если стационарное состояние устойчиво по Ляпунову и при этом разница между решением $x(t)$ и стационарным значением $\bar{x}$ стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{t \to +\infty} \left| x(t) - \bar{x} \right| = 0$, то стационарное состояние называют ***асимптотически устойчивым***.

Иными словами, если любое решение $x(t)$, начинающееся в окрестности δ стационарного состояния $\bar{x}$, со временем не уходит из некоторой окрестности ε (рис. 1.1,а), то такое состояние ***устойчиво***; если $x(t)$ возвращается к стационарному состоянию $\bar{x}$, то такое состояние ***асимптотически устойчиво*** (рис. 1.1,б); если хотя бы одно решение уходит на бесконечность, то такое состояние ***неустойчиво*** (рис. 1.1,в).

Понятие асимптотической устойчивости является более строгим. Если стационарное состояние асимптотически устойчиво, то оно устойчиво и по Ляпунову.

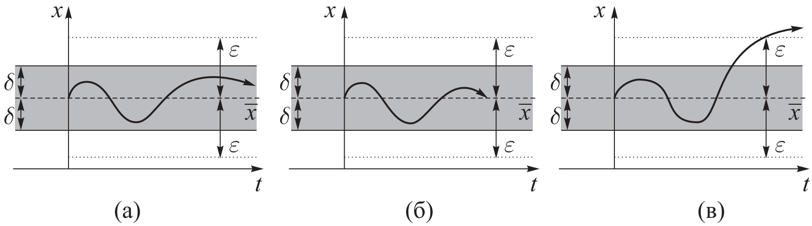


Рис. 1.1. Иллюстрация определения устойчивости стационарного состояния (обозначено пунктиром): а) состояние устойчиво по Ляпунову; б) состояние асимптотически устойчиво; в) состояние неустойчиво

Аналитический метод исследования устойчивости стационарного состояния состоит в следующем. Пусть $\overline{x}$ — стационарное состояние уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \qquad (1.5)$$

Зададим небольшое отклонение ξ переменной x от ее стационарного значения $\overline{x}$: $x = \overline{x} + \xi$, такое, что $\xi/\overline{x} << 1$. Подставим выражение для x в уравнение (1.5):

$$\frac{d(\overline{x} + \xi)}{dt} = f(\overline{x} + \xi). \qquad (1.6)$$

Учитывая, что $\frac{d\overline{x}}{dt} = 0$, можно преобразовать уравнение (1.6) и перейти от переменной x к переменной ξ:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\overline{x} + \xi). \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.7) определяет поведение во времени отклонения $\xi = x - \overline{x}$ от стационарного состояния. Решение уравнения (1.7) $\xi(t)$

вблизи нулевой точки $\xi = 0$ будет совпадать с решением $x(t)$ уравнения (1.5) вблизи стационарного состояния $\bar{x}$. Правая часть уравнения (1.7) указывает величину скорости, с которой отклонение $\xi(t)$ будет увеличиваться или уменьшаться с течением времени.

В терминах новой переменной $\xi(t)$ стационарное состояние будет ***устойчивым по Ляпунову***, если, задав любое сколь угодно малое положительное ε, всегда можно найти такое δ, что

$$\left|\xi(t)\right| < \varepsilon \text{ для } t_0 \le t < +\infty, \text{ если } \left|\xi(t_0)\right| < \delta,$$

и ***асимптотически устойчивым***, если отклонение $\xi(t)$ стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\xi(t)\right| = 0$.

Разложим функцию $f(\bar{x}+\xi)$ в ряд Тейлора в точке $\xi_0 = 0$:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\xi^2 + \ldots .$$

Учитывая, что $f(\bar{x}) = 0$, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots, \tag{1.8}$$

где $a_1 = f'_x(\bar{x})$, $a_2 = \frac{1}{2}f''_{xx}(\bar{x})$, … .

Поскольку вблизи точки $\xi_0 = 0$ всегда можно выделить достаточно малую окрестность, где вклад нелинейных членов разложения становится пренебрежимо малым по сравнению с вкладом линейных членов (см. приложение 1), можно отбросить члены порядка 2 и выше. Получим ***линеаризованное уравнение,*** или ***уравнение первого приближения, которое, опуская нижний индекс, можно записать как***:

$$\frac{d\xi}{dt} = a\cdot\xi, \tag{1.9}$$

где $a = f'_x(\bar{x})$.

Решим полученное линейное уравнение. Разделяя переменные, проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = a \int dt,$$

$$\ln|\xi| = a \cdot t + C.$$

Переходя от логарифмов к значениям переменной ξ и определяя произвольную постоянную C из начальных условий, получим

$$\xi(t) = \xi(t_0) \cdot e^{a \cdot t}, \tag{1.10}$$

где $\xi(t_0)$ — значение переменной $\xi(t)$ в начальный момент времени. График функции представлен на рис. 1.2.

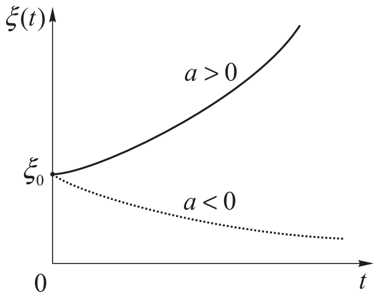


Рис. 1.2. График решения уравнения (1.9): $\xi(t) = \xi(t_0) \cdot e^{a \cdot t}$

Если $a < 0$, то $\xi \to 0$ при $t \to \infty$; следовательно, отклонение от стационарного состояния $\bar{x}$ со временем затухает; тогда стационарное состояние $\bar{x}$ по определению устойчиво.

Если $a > 0$, то $\xi \to \infty$ при $t \to \infty$, то есть отклонение от стационарного состояния $\bar{x}$ будет со временем возрастать; тогда стационарное состояние $\bar{x}$ неустойчиво.

Если $a = 0$, то анализ уравнения первого приближения не может дать ответа на вопрос об устойчивости стационарного состояния системы. Необходимо рассматривать члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора или использовать другие методы определения устойчивости.

Таким образом, критерий Ляпунова позволяет задать следующий алгоритм оценки устойчивости стационарных состояний уравнения $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$:

1) найти стационарные состояния $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$, приравнивая нулю правую часть уравнения: $f(x) = 0$;
2) определить знаки производных $f'_x(\overline{x}_1)$, $f'_x(\overline{x}_2), \ldots, f'_x(\overline{x}_n)$ и сделать вывод об устойчивости каждого стационарного состояния.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ

Кроме аналитического метода исследования устойчивости стационарного состояния (метода Ляпунова) существует и графический. Причем в случае одного дифференциального уравнения графический метод позволяет оценить устойчивость, даже когда $f'_x(\overline{x}) = 0$. Разберем графический способ на следующем примере.

Пусть $\dfrac{dx}{dt} = (x-1)(x-2)(x-3)^2$. Найдем стационарные состояния уравнения и определим их тип устойчивости с помощью графика функции $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$ (рис. 1.3).

Заметим, что ось абсцисс является фазовым пространством для рассматриваемого уравнения (уравнения первого порядка). Движением изображающей точки в фазовом пространстве будет ее движение по оси абсцисс. Скорость движения $\dfrac{dx}{dt}$ изображающей точки определяется видом правой части $f(x)$.

Определим направление движения изображающей точки: изображающая точка движется вправо, если $f(x) > 0$; изображающая точка движется влево, если $f(x) < 0$.

Особые точки: $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 2$, $\bar{x}_3 = 3$.

Зададим небольшое отклонение от особой точки $\bar{x}_1 = 1$ влево: $\bar{x}_1 - \xi$. В точке с координатой $x = \bar{x}_1 - \xi$ функция $f(x) > 0$.

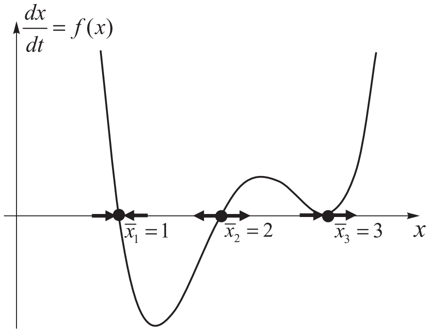


Рис. 1.3. График функции $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$

Это означает, что изображающая точка должна двигаться вправо и возвращаться к точке $\bar{x}_1 = 1$. Теперь зададим небольшое отклонение от особой точки $\bar{x}_1 = 1$ вправо: $\bar{x}_1 + \xi$. В этой области функция $f(x) < 0$; следовательно, изображающая точка должна двигаться влево и вновь возвращаться к точке $\bar{x}_1 = 1$. Таким образом, малые отклонения от точки $\bar{x}_1 = 1$ со временем затухают, стационарное состояние $\bar{x}_1 = 1$ устойчиво.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что любое отклонение от особой точки $\bar{x}_2 = 2$ со временем возрастает, то есть стационарное состояние $\bar{x}_2 = 2$ неустойчиво.

Анализ стационарного состояния $\bar{x}_3 = 3$ показывает, что отклонение влево от него затухает, тогда как отклонение вправо возрастает, то есть стационарное состояние $\bar{x}_3 = 3$ по определению не является устойчивым.

Можно проследить связь графического способа определения устойчивости с методом Ляпунова. Построим касательные к кривой

$f(x)$ в стационарных точках $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 2$, $\bar{x}_3 = 3$ и определим соответствующие углы наклона касательных как α_1, α_2, α_3 (рис. 1.4).

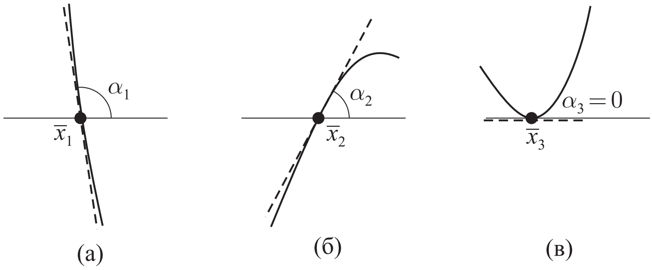


Рис. 1.4. Касательные (пунктирные линии) к графику функции $f(x)$ (сплошные кривые) в стационарных точках

Напомним, что тангенс угла наклона касательной к кривой в любой ее точке равен производной функции в этой точке:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(\bar{x}_1), \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = f'(\bar{x}_2), \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = f'(\bar{x}_3).$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_1 < 0$ (рис. 1.4,а), то $f'(\bar{x}_1) < 0$, и по критерию Ляпунова точка $\bar{x}_1 = 1$ устойчива.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_2 > 0$ (рис. 1.4,б), то $f'(\bar{x}_2) > 0$, и по критерию Ляпунова точка $\bar{x}_2 = 2$ неустойчива.

В последнем случае $\operatorname{tg}\alpha_3 = 0$ (рис. 1.4,в). Критерий Ляпунова не дает ответа об устойчивости точки $\bar{x}_3 = 3$, тогда как графический метод позволил определить (см. выше), что эта точка неустойчива.

Задание 1.2

Исследуйте на устойчивость стационарные состояния моделей (а) и (б) методом Ляпунова, модели (в) — графическим методом.

а) $\dfrac{dx}{dt} = V - kx$,

б) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - rx + m$,

в) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\beta + \tau x}(x - L)(x - K)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что является фазовым пространством для одного дифференциального уравнения?

2. Как находятся стационарные состояния моделей, описываемых одним дифференциальным уравнением?

3. Почему при исследовании на устойчивость стационарного состояния можно отбросить нелинейные члены в разложении в ряд Тейлора правой части уравнения?

4. Как определить устойчивость (неустойчивость) стационарного состояния методом Ляпунова?

5. Как определить устойчивость (неустойчивость) стационарного состояния графическим способом?

6. Как применить критерий Ляпунова, исследуя график скорости изменения переменной?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 1

1.1. Для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+x} - \gamma x, \text{ где } 0 < \gamma < 1,$$

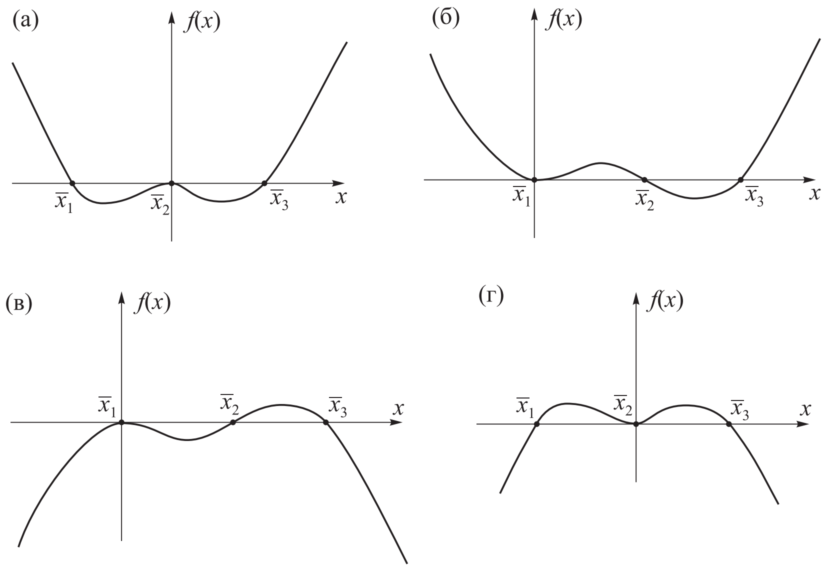
а) найдите стационарные состояния;

б) каждое из стационарных состояний исследуйте на устойчивость методом Ляпунова.

1.2. Пусть $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$.

а) Определите по графику функции $f(x)$ устойчивость всех стационарных состояний уравнения.

б) Куда будет двигаться изображающая точка в каждом из вариантов, если ее поместить между состояниями $\overline{x}_2$ и $\overline{x}_3$?



1.3. Зависимость стационарного состояния от параметра называется ***фазопараметрической диаграммой***.

Постройте фазопараметрическую диаграмму для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - bx + 1 \text{ (для } x > 0,\ b > 0\text{)}.$$

Найдите значения параметра *b*, при котором стационарных состояний нет; есть только одно стационарное состояние; есть два стационарных состояния.

1.4. Найдите решение $x(t)$ дифференциального уравнения, разделяя переменные *x* и *t*,

$$\frac{dx}{dt} = 5x\left(1 - \frac{x}{100}\right),$$

если

а) $x(0) = 10$,

б) $x(0) = 150$.

Исследуйте полученные решения $x(t)$. Найдите горизонтальные асимптоты и точки перегиба полученных функций $x(t)$.