Семинар 9

Занятие в компьютерном классе. Колебательные системы. Локальная модель брюсселятора. Построение фазовых портретов при разных значениях параметров.

Колебательные системы

Для биологических систем характерно периодическое изменение различных характеристик. С некоторыми из типов периодических изменений мы уже имели дело при рассмотрении особых точек типа центр, фокус. Однако часто в живых системах наблюдаются колебания, обладающие особым отличительным свойством: **неизменностью во времени периода и амплитуды колебаний,** означающей **стационарность и устойчивость колебательного режима.** В данном случае периодическое изменение величин представляет собой один из типов стационарного поведения системы. Если колебания имеют постоянную период и амплитуду, устанавливаются независимо от начальных условий и поддерживаются свойствами самой системы, без воздействия периодической силы, система называется ***автоколебательной.*** На фазовой плоскости такому типу поведения соответствует устойчивый ***предельный цикл*** – притягивающее множество. Предельный цикл есть изолированная замкнутая кривая.

Предельные циклы могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Предельный цикл ***устойчив***, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл – окрестность ε, – что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности ε, асмиптотически при $t \to \infty$ приближаются к предельному циклу. Если же наоборот, в любой сколь угодно малой окрестности ε предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \to \infty$, то такой предельный цикл называется ***неустойчивым***. Такие циклы разделяют области влияния разных притягивающих множеств.

Внутри устойчивого предельного цикла обязательно есть неустойчивая точка типа фокус или узел. Необходимым условием рождения устойчивого предельного цикла является переход (бифуркация) типа стационарного состояния от устойчивого фокуса к неустойчивому (действительная часть соответствующих характеристических чисел $\mathrm{Re}\lambda_{1,2}$ через 0 переходит от отрицательных значений к положительным, при этом мнимая часть характеристических чисел $\mathrm{Im}\lambda_{1,2}$ отрицательна). После такой бифуркации возможность существования устойчивого предельного цикла сохраняется до тех пор, пока $\mathrm{Re}\lambda_{1,2}$ сохраняют положительное значение.

Локальная модель брюсселятора

Брюсселятор – базовая модель, являющаяся классическим примером автоколебательного поведения переменных (концентраций) в системе химических реакций. Брюсселятор представляет собой следующую схему гипотетических реакций:

$$A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X\,, \qquad 2X + Y \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} 3X\,, \qquad B + X \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} Y + C\,, \qquad X \underset{k_{-4}}{\overset{k_4}{\rightleftarrows}} R\,.$$

Здесь A, B – исходные вещества, C, R – продукты, X, Y – промежуточные вещества. Пусть конечные продукты C и R немедленно удаляются из реакционного пространства. Это означает, что обратные константы $k_{-3} = k_{-4} = 0$. Если субстрат A находится в избытке, то $k_{-1} = 0$. Предполагают также, что $k_{-2} = 0$. Значения остальных констант приравнивают 1. Тогда рассматриваемая схема реакций описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A - x(B+1) + x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x(B - xy), \\ A, B > 0, \\ x, y > 0. \end{cases} \qquad \textbf{(9.1)}$$

Исследуем систему уравнений **(9.1)**. Найдем стационарные значения:

$$\begin{cases} A - \overline{x}(B+1) + \overline{x}^2 \overline{y} = 0, \\ \overline{x}(B - \overline{xy}) = 0, \\ A, B > 0, \\ x, y > 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A - \overline{x}(B+1) + \overline{x}^2 \overline{y} = 0, \\ \overline{x} = 0, \overline{x} = \dfrac{B}{\overline{y}}, \\ A, B > 0, \\ x, y > 0, \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} A - \dfrac{B}{\overline{y}}(B+1) + \left(\dfrac{B}{\overline{y}}\right)^2 \overline{y} = 0, \\ \overline{x} = \dfrac{B}{\overline{y}}, \\ A, B > 0, \\ x, y > 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{y} = \dfrac{B}{A}, \\ \overline{x} = A, \\ A, B > 0, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Исследуем тип стационарной точки и ее устойчивость. Найдем коэффициенты линеаризации:

$$P'_x = -(B+1) + 2xy\Big|_{(\overline{x},\overline{y})} = B - 1,$$

$$P'_y = x^2\Big|_{(\overline{x},\overline{y})} = A^2,$$

$$Q'_x = B - 2xy\Big|_{(\overline{x},\overline{y})} = -B,$$

$$Q'_y = -x^2\Big|_{(\overline{x},\overline{y})} = -A^2.$$

1) Определим знак $P_x' + Q_y'$ для ответа на вопрос об устойчивости:

$$P_x' + Q_y' = B - 1 - A^2.$$

При $B > 1 + A^2$ выполнено неравенство $P_x' + Q_y' > 0$, значит, в этой области параметров стационарная точка неустойчива.

При $B \le 1 + A^2$ выполняется неравенство $P_x' + Q_y' \le 0$, таким образом, в этой области параметров стационарная точка устойчива.

2) $\Delta = P_x' \cdot Q_y' - P_y' \cdot Q_x' = -A^2(B-1) + A^2 B = A^2 > 0$ — седел не существует.

3) Фокус или узел? Надо определить знак подкоренного выражения в формуле для вычисления характеристических чисел $\lambda_{1,2}$:

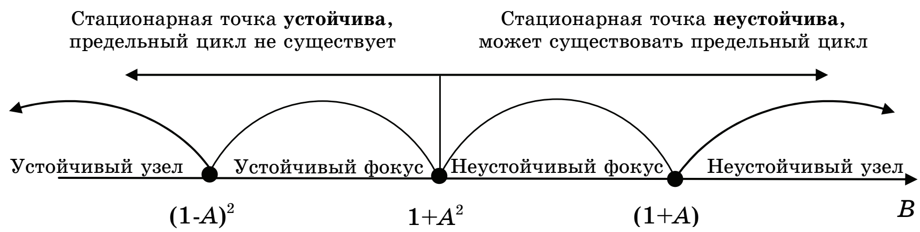
$$(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2 = (B - 1 - A^2 - 2A)(B - 1 - A^2 + 2A) =$$
$$= (B - (1 - A)^2)(B - (1 + A)^2).$$

Это выражение отрицательно при выполнении неравенства $(1 - A)^2 < B < (1 + A)^2$. Таким образом, при выполнении неравенства $(1 - A)^2 < B < (1 + A)^2$ в системе должны наблюдаться колебания.

При $B \le (1 - A)^2$ и $B \ge (1 + A)^2$ колебаний в системе не будет.

При $P_x' + Q_y' = 0$ происходит смена устойчивости стационарного состояния типа фокус, в этот момент происходит рождение предельного цикла.

Получившиеся результаты можно представить в виде параметрической диаграммы:



Задачи к семинару 9

9.1. Определите тип стационарного состояния системы в зависимости от значения параметра a $(a>0)$. Укажите интервал значений параметра, при котором в системе имеют место автоколебания. Ответ оформите в виде параметрической диаграммы (прямой).

а) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a(1-x^2)y - x. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a + x^2 y - 6x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - x^2 y. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay\left(x - \dfrac{2}{1+y}\right). \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 + x^2 y - (a+1)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - x^2 y. \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1.25y\left(x - \dfrac{1+a}{1+ay}\right). \end{cases}$$