Семинар 7

Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных систем второго порядка. Классическая система В. Вольтерра. Аналитическое исследование (определение стационарных состояний и их устойчивости) и построение фазовых и кинетических портретов.

Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных систем второго порядка

Пусть биологическая система описывается системой двух автономных дифференциальных уравнения второго порядка общего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases}$$

Стационарные значения переменных системы определяются из алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} P(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \\ Q(\overline{x}, \overline{y}) = 0. \end{cases}$$

Исследование характера поведения траекторий системы в окрестностях стационарных состояний, а также анализ устойчивости стационарных состояний проводят с помощью метода Ляпунова (метод линеаризации систем в окрестности стационарного состояния). Ляпунов показал, что в большом числе случаев анализ устойчивости стационарного состояния нелинейной системы можно заменить анализом устойчивости системы, линеаризованной в окрестности стационарного состояния.

Коэффициенты линеаризованной системы в окрестности **каждого** стационарного состояния исходной нелинейной системы определяются по формулам (подробный вывод приведен в *Лекции 5* учебника Г. Ю. Ризниченко, (Ризниченко, 2002)):

$$\begin{pmatrix} a = P'_x(\overline{x}, \overline{y}) & b = P'_y(\overline{x}, \overline{y}) \\ c = Q'_x(\overline{x}, \overline{y}) & d = Q'_y(\overline{x}, \overline{y}) \end{pmatrix}.$$

Так же, как и в линейных системах, корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}\right)$ дают представление о характере поведения решений системы. Если оба характеристических корня имеют отличные от нуля действительные части (***грубые системы***), то исследование линеаризованной системы дает всегда правильный ответ на вопрос о типе устойчивости состояния исходной нелинейной системы, а также о характере фазовых траекторий в достаточно малой его окрестности. Как и в случае линейных уравнений, возможны пять типов грубых состояний равновесия: узел (устойчивый, неустойчивый), фокус (устойчивый, неустойчивый) и седло. Если действительные части обоих корней характеристического уравнения равны нулю, или если один корень равен нулю, а другой отрицателен, то для ответа на вопрос об устойчивости необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений исходной системы (функций $P(x,y), Q(x,y)$).

Пример 7.1: Проведите линеаризацию системы уравнений в окрестности нулевого стационарного состояния и определите его тип устойчивости:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

Решение: Для линеаризации системы уравнений в окрестности нулевого стационарного состояния найдем частные производные функций в правых частях уравнений. В качестве координаты стационарного состояния $(\overline{x}, \overline{y})$ подставим значения $(0,0)$.

$$a = P'_x(\overline{x}, \overline{y}) = \left[2xy - x + y\right]'_x = 2y - 1,\ \ 2y - 1\Big|_{y=0} = -1;$$

$$b = P'_y(\overline{x}, \overline{y}) = \left[2xy - x + y\right]'_y = 2x + 1,\ \ 2x + 1\Big|_{x=0} = 1;$$

$$c = Q'_x(\overline{x}, \overline{y}) = \left[5x^4 + y^3 + 2x - 3y\right]'_x = 20x^3 + 2,\ \ 20x^3 + 2\Big|_{x=0} = 2;$$

$$d = Q'_y(\overline{x}, \overline{y}) = \left[5x^4 + y^3 + 2x - 3y\right]'_y = 3y^2 - 3,\ \ 3y^2 - 3\Big|_{y=0} = -3.$$

Имеем $a + d = -1 + (-3) = -4$, $ad - bc = (-1)\cdot(-3) - 1\cdot 2 = 1$, особая точка грубая. Характеристические корни системы первого приближения равны $\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$, оба действительны и отрицательны, следовательно, в окрестности нулевой особой точки поведение фазовых траекторий системы будет соответствовать типу «устойчивый узел».

Системы нелинейных уравнений будем исследовать по следующему плану:

1) определение стационарных состояний,
2) линеаризация системы в окрестности **каждого** стационарного состояния,
3) расчет значений корней характеристических уравнений системы, линеаризованной в окрестности **каждого** стационарного состояния,
4) вывод об устойчивости и характере поведения фазовых траекторий в окрестностях **каждого** стационарного состояния.

Аналитическое исследование модели Вольтерра

Классическая модель «хищник–жертва», предложенная В. Вольтерра для объяснения периодических изменений числа особей, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(\gamma_{yx} x - \varepsilon_y). \end{cases}$$

Здесь x – число жертв, y – число хищников, ε_x – скорость размножения жертв, ε_y – скорость гибели хищников, γ_{xy}, γ_{yx} – параметры, отражающие влияние встречи жертвы и хищника на скорость изменения численности жертвы и хищника соответственно.

1) Поиск стационарных состояний. Решаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y) = 0, \\ y(\gamma_{yx} x - \varepsilon_y) = 0. \end{cases}$$

Получаем координаты двух стационарных состояний: $\bar{x}_1 = 0,\ \bar{y}_1 = 0,\ \bar{x}_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}},\ \bar{y}_2 = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$. Все параметры положительны, поэтому точка, соответствующая второму (ненулевому) стационарному состоянию принадлежит положительной четверти фазовой плоскости.

2-3) Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния и расчет значений корней характеристических уравнений системы, линеаризованной в окрестности **каждого** стационарного состояния.

$$P'_x(\bar{x},\bar{y}) = \varepsilon_x - \gamma_{xy}\bar{y}\ ,\ \ P'_y(\bar{x},\bar{y}) = -\bar{x}\gamma_{xy}$$
$$Q'_x(\bar{x},\bar{y}) = \bar{y}\gamma_{yx}\ ,\ \ Q'_y(\bar{x},\bar{y}) = \gamma_{yx}\bar{x} - \varepsilon_y$$

В окрестности стационарного состояния $\bar{x}_1 = 0, \bar{y}_1 = 0$ матрица коэффициентов линеаризованной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & -\varepsilon_y \end{pmatrix}.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения есть $\lambda^I_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left((\varepsilon_x - \varepsilon_y) \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_x\varepsilon_y}\right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ -\varepsilon_y \end{bmatrix}$.

Корни действительные, разных знаков. Таким образом, получаем, стационарное состояние $\overline{x}_1 = 0,\ \ \overline{y}_1 = 0$ неустойчиво, и поведение фазовых траекторий в его окрестности имеет седловой характер.

В окрестности стационарного состояния $\overline{x}_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}, \overline{y}_2 = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$ матрица коэффициентов линеаризованной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_y \dfrac{\gamma_{xy}}{\gamma_{yx}} \\ \varepsilon_x \dfrac{\gamma_{yx}}{\gamma_{xy}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения есть $\lambda_{1,2}^{II} = \pm i\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}$. Таким образом, исследование показывает, что особая точка $\overline{x}_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}, \overline{y}_2 = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$ является центром, а траектории вблизи этого стационарного состояния являются концентрическими эллипсами.

Пример задания по теме «Исследование модели В. Вольтерра «хищник-жертва»

1. Используя численные значения параметров, найдите координаты стационарных состояний, коэффициенты линеаризованной системы в окрестности каждого из стационарных состояний, значения корней характеристических уравнений системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(p_1 - p_2 y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(p_3 x - p_4). \end{cases}$$

Результат занесите в таблицу.

Параметры	Координаты стационарных состояний	Коэффициенты линеаризованной системы	Значения корней характеристического уравнения
$p_1 = 4$ $p_2 = 0.1$ $p_3 = 0.8$ $p_4 = 0.5$	$\bar{x}_1 =$ $\bar{y}_1 =$	$a =$ $b =$ $c =$ $d =$	$\lambda_1^I =$ $\lambda_2^I =$
	$\bar{x}_2 =$ $\bar{y}_2 =$	$a =$ $b =$ $c =$ $d =$	$\lambda_1^{II} =$ $\lambda_2^{II} =$

2. Найдите уравнения главных изоклин и сепаратрис. Постройте в тетради качественный фазовый портрет решения системы В. Вольтерра «хищник-жертва».

3. В программе TRAX постройте фазовый портрет решения системы В. Вольтерра «хищник-жертва». Обратите внимание на выбор масштаба окна фазовой плоскости. Зарисуйте результат.

4. В программе TRAX постройте кинетический портрет решения системы В. Вольтерра «хищник-жертва» для произвольного начального положения изображающей точки. Зарисуйте результат.

Задачи к семинару 7

7.1. Проведите линеаризацию системы уравнений в окрестности нулевого стационарного состояния и определите его тип устойчивости:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x^2 - x + 3y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2e^y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

7.2. Для модели «кинетические уравнения Лотки»

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y \end{cases}$$

найдите стационарную точку $(\bar{x}, \bar{y})$ и определите ее тип. Найдите уравнения главных изоклин, изоклин $\pm 45^\circ$. Для заданных значений параметров постройте эскиз фазового портрета системы:

1) $k_0 = 8$, $k_1 = 1$, $k_0 = 2$;

2) $k_0 = 8$, $k_0 = 1$, $k_0 = 1$.