Семинары 5 и 6

Система двух автономных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Фазовая плоскость. Изоклины. Построение фазовых портретов. Кинетические кривые. Знакомство с программой TRAX.

Фазовой плоскостью называется плоскость с осями координат, на которых отложены значения переменных x и y, каждая точка плоскости соответствует определенному состоянию системы. Совокупность точек на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных $x(t)$, $y(t)$ согласно заданным уравнениям исследуемой системы, называется ***фазовой траекторией***. Совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных дает портрет системы. Построение ***фазового портрета*** позволяет сделать выводы о характере изменений переменных x и y без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

Для построения фазового портрета на фазовую плоскость наносят изоклины (***метод изоклин***). ***Изоклина*** – линия на плоскости, в каждой точке которой, касательные к фазовым траекториям исследуемой системы уравнений имеют один угол наклона.

Пусть уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y). \end{cases} \tag{5.1}$$

Тогда ***уравнение изоклины*** запишется как:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = A = const\,. \tag{5.2}$$

В уравнении (5.2) константа A есть тангенс угла наклона $A = \mathrm{tg}\,\varphi$ касательной к фазовой траектории. Через ***главные изоклины*** (нуль-изоклины) фазовые траектории проходят под углом $\varphi = 0^\circ$ (***изоклина горизонтальных касательных***) и $\varphi = 90^\circ$ (***изоклина вертикальных касательных***). Для изоклины горизонтальных касательных уравнение (5.2.) принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \mathrm{tg}\,0^\circ = 0 \text{ или } Q(x,y) = 0\,;$$

для изоклины вертикальных касательных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \mathrm{tg}\,90^\circ = \infty \text{ или } P(x,y) = 0\,.$$

Все изоклины пересекаются в особой точке $(\overline{x}, \overline{y})$, для которой $Q(\overline{x}, \overline{y}) = P(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy = Q(x,y). \end{cases} \tag{5.3}$$

Построение фазового портрета начинаем с построения ***главных изоклин***. Для системы двух линейных уравнений – это всегда прямые, проходящие через начало координат. Уравнение ***изоклины горизонтальных касательных***: $Q(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{d}x$. ***Уравнение изоклины вертикальных касательных***: $P(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x$. Для дальнейшего построения фазового портрета полезно построить изоклину касательных, проходящих под углом $\varphi = \pm 45^\circ$. Для нахождения соответствующего уравнения изоклины необходимо решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi \Leftrightarrow \frac{cx + dy}{ax + by} = \pm 1$. Можно находить и изоклины касательных других углов, пользуясь приблизительными значениями тангенсов углов. В построении фазового портрета также может помочь ответ на вопрос, под каким углом фазовые траектории должны пересекать координатные оси. Для этого в уравнение изоклины $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{cx + dy}{ax + by} = \operatorname{tg}\varphi$ подставляем соответствующие равенства $x = 0$ (для определения угла пересечения с осью OY) и $y = 0$ (для определения угла пересечения с осью OX).

Рассмотрим примеры построения фазового и кинетического портрета поведения траекторий системы вблизи особой точки. Построить кинетический портрет системы – означает построить графики зависимости величин переменных x, y от времени. По фазовому портрету можно построить кинетический, и наоборот. Одной фазовой траектории соответствует одна пара кинетических кривых $x(t)$, $y(t)$.

Пример 5.1. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

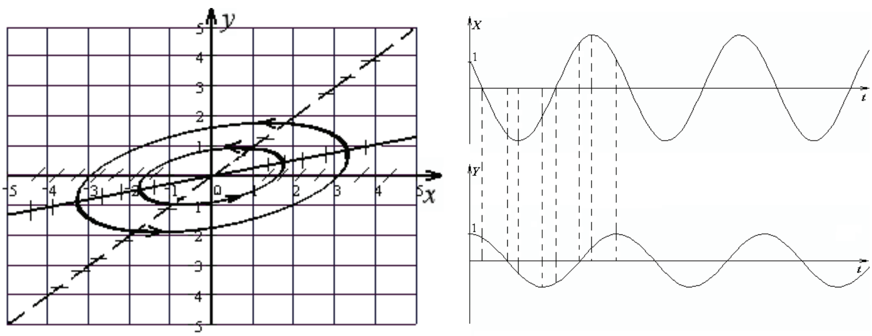

Рис. 5.1. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.1.

Координаты особой точки – **(0,0)**. Коэффициенты линейных уравнений равны: $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $d = -1$. Определим тип стационарного состояния (см. *Семинар 4*, стр. 51):

$$(a + d) = (1 - 1) = 0,$$

$$ad - bc = 1 \cdot (-1) - (-4) \cdot (1) = 3,$$

$$\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)} = \sqrt{0 - 4 \cdot 3} = i\sqrt{12}\ .$$

Таким образом, характеристические корни являются мнимыми: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, следовательно, особая точка рассматриваемой линейной системы имеет тип «центр».

Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = x$, уравнение изоклины вертикальных касательных: $y = \frac{1}{4}x$. Найдем уравнение изоклины, которую траектории системы пересекают под углом в 45° к оси абсцисс:

$$\frac{x-y}{x-4y} = 1, \quad x - y = x - 4y, \quad y = 0.$$

После построения фазового портрета необходимо определить направление движения по найденным траекториям. Это можно сделать следующим образом. Возьмем произвольную точку на любой траектории. Например, на изоклине горизонтальных касательных (1,1). Подставим координаты этой точки в систему уравнений. Получим выражения для скоростей изменения переменных x, y в этой точке:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - 4 \cdot 1 = -3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получившиеся значения нам показывают, что скорость изменения переменной x – отрицательная, то есть ее значение должно уменьшаться, а переменная y – не изменяется. Отмечаем полученное направление стрелкой (против часовой стрелки). Таким образом, в рассматриваемом примере движение по фазовым траекториям направлено против часовой стрелки.

Подставляя в систему уравнений координаты разных точек, можно получить «карту» векторов, задающих направление и скорость движения изображающей точки по фазовой кривой, так называемое векторное поле.

Отметим, что на изоклине горизонтальных касательных переменная y достигает своего максимального или минимального значения на данной траектории. Наоборот, на изоклине вертикальных касательных, своего максимального по модулю значения для выбранной траектории достигает переменная x.

Пример 5.1. Окончание.

Перейдем к построению кинетического портрета системы. Выберем на фазовом портрете произвольную точку на произвольной фазовой траектории. Это начальная точка, соответствующая моменту времени $t=0$. В зависимости от направления движения в рассматриваемой системе значения переменных x, y либо уменьшаются, либо увеличиваются. Пусть координаты начальной точки – (1,1). Стартуя из этой точки, мы должны двигаться против часовой стрелки, координаты x и y уменьшаются. Координата x проходит через 0, значение y при этом положительно. Далее координаты x и y продолжают уменьшаться, координата y проходит через 0 (значение x при этом отрицательно). Величина x достигает минимального значения на изоклине вертикальных касательных, затем начинает увеличиваться. Величина y своего минимального значения достигает на изоклине горизонтальных касательных (значение x в этот момент времени отрицательно). Далее и величина x, и величина x увеличиваются, возвращаясь к начальным значениям.

Пример 5.2. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

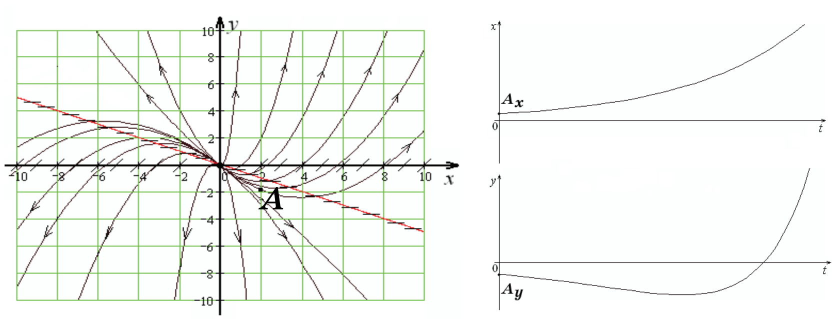

Рис. 5.2. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.2.

Координаты особой точки – (0,0). Тип особой точки – «неустойчивый узел». Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = -\dfrac{1}{2}x$, уравнение изоклины вертикальных касательных: $x = 0$. Найдем уравнение изоклины, которую траектории системы пересекают под углом в 45° к оси абсцисс:

$$\frac{x}{x+2y} = 1, \quad x = x + 2y, \quad y = 0 \text{ (рис. 5.2).}$$

Направление движения по траекториям можно определять аналитически по знаку $(a+d)$ (устойчивая или неустойчивая точка) или методом векторного поля.

Кинетический портрет строится с помощью рассуждений, аналогичных предыдущему случаю. В качестве начальной точки выбрана точка ***A*** с координатами (A_x, A_y).

Пример. 5.3. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$$

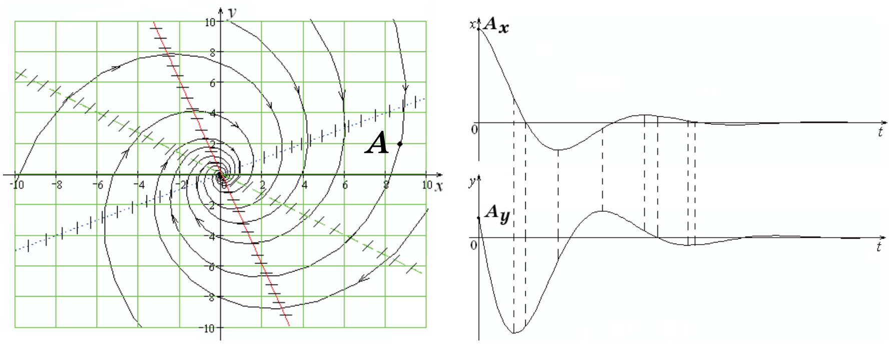

Рис. 5.3. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.3.

Координаты особой точки – (0,0). Тип особой точки – «устойчивый фокус». Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = -3x$, уравнение изоклины вертикальных касательных: $y = \frac{1}{2}x$. Найдем уравнение изоклины, которую траектории системы пересекают под углом в 45° к оси абсцисс:

$\dfrac{-x+2y}{-3x-y} = 1, \quad -x + 2y = -3x - y, \quad y = -\dfrac{2}{3}x$ (рис. 5.3).

Аналогично случаю с узлом направление движения по траекториям можно определять аналитически по знаку $(a+d)$ (устойчивая или неустойчивая точка) или методом векторного поля.

Кинетический портрет строится с помощью рассуждений, аналогичных предыдущему случаю. В качестве начальной точки выбрана точка $\boldsymbol{A}$ с координатами (A_x, A_y).

Пример 5.4. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y. \end{cases}$$

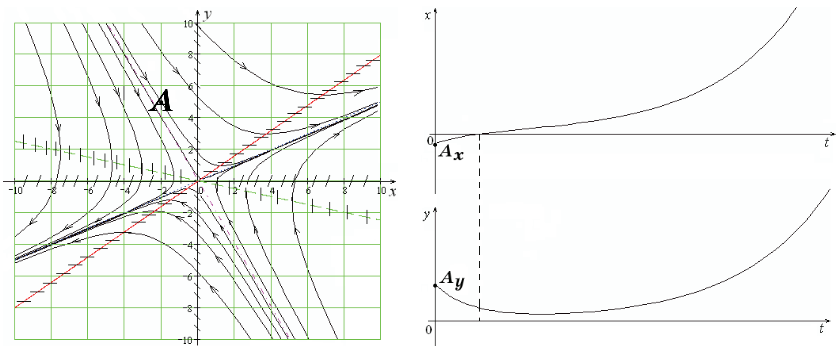

Рис. 5.4. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.4.

Координаты особой точки – (0,0). Тип особой точки – «седло». Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = \frac{4}{5}x$, уравнение изоклины вертикальных касательных: $y = -\frac{1}{4}x$.

Определим, под каким углом фазовые траектории пересекают оси координат.

$\left.\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 5y}{x + 4y}\right|_{x=0} = -\dfrac{5}{4} = -1.25 \approx \operatorname{tg}(-52^\circ)$, т.е. ось OY фазовые траектории должны пересекать под углом примерно -52° (рис. 5.4),

$\left.\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 5y}{x + 4y}\right|_{y=0} = 4 \approx \operatorname{tg} 75^\circ$, т.е. ось OX фазовые траектории должны пересекать под углом примерно 75°.

Важной характеристикой фазового портрета особой точки типа «седло» являются две сепаратрисы. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов линейных уравнений системы: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Напомним, что собственным вектором матрицы M, соответствующим собственному числу λ, называется любой отличный от нуля вектор $\vec{\mathbf{x}}$, который удовлетворяет уравнению $M\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$. Итак, уравнения прямых-сепаратрис задаются уравнениями

1) $\left(a - \lambda_{1,2}\right) \cdot x + b \cdot y = 0$ или

2) $c \cdot x + \left(d - \lambda_{1,2}\right) \cdot y = 0$,

где $\lambda_{1,2}$ – характеристические числа матрицы коэффициентов системы. Одному значению λ соответствует одна прямая (выражения 1 и 2 задают совпадающие прямые). Сепаратрисы могут совпадать с главными изоклинами. Кроме того, в роли сепаратрис могут выступать оси координат: например, если коэффициент $b = 0$, то из уравнения $\left(a - \lambda_{1,2}\right) \cdot x + 0 \cdot y = 0$ получаем уравнение сепаратрисы $x = 0$ (ось OY); если характеристическое число λ совпадает, например, с коэффициентом $a = \lambda$, то получаем уравнение $0 \cdot x + b \cdot y = 0$, из которого следует, что прямая $y = 0$ (ось OX) является сепаратрисой.

Пример 5.4. Окончание.

В разбираемом примере характеристические числа равны $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((1-5) \pm \sqrt{(1-5)^2 - 4\cdot\left(1\cdot(-5) - 4\cdot 4\right)}\right) = \left[\begin{matrix} 3 \\ -7 \end{matrix}\right.$.

Уравнения сепаратрис задаются уравнениями: $(1-3)x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$ и $\left(1-(-7)\right)x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$. Убедимся, что вторая пара выражений даст те же уравнения сепаратрис: $4x + \left((-5)-3\right)y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$ и $4x + \left((-5)-(-7)\right)y = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = -2x.$

Итак, получаем $y = \frac{x}{2}$, $y = -2x$ – уравнения сепаратрис.

Кинетический портрет строится с помощью рассуждений, аналогичных предыдущему случаю. В качестве начальной точки выбрана точка ***A*** с координатами (A_x, A_y).

На что необходимо обратить внимание: особая точка типа «седло» – всегда неустойчива. На больших временах фазовые траектории уходят в бесконечность или, при соответствующем расположении сепаратрис, асимптотически стремятся к одной из осей координат.

На практических занятиях для компьютерного построения фазовых и кинетических портретов мы используем программу *TRAX*. В качестве рабочей программы можно также использовать *MathCad, MatLab* (коммерческие программы), *XPP/WinPP, Octave, Scilab* (свободно распространяемые программы) и другие программные средства.

Памятка для работы в программе TRAX

Создание модели

1) Выбрать пункт меню «Differential equations» (стрелкой «вниз»), **Enter.**
2) Нажать клавишу **Insert** и ввести имя новой модели, **Enter.**
3) Ввести уравнения. Параметры модели обозначаются только символами p0, p1…p9.

Работа с моделями

1) Перемещение по окну параметров осуществляется с помощью клавиш **Page Up, Page Down**.
2) Для того, чтобы задать значение параметра, необходимо установить курсор в нужную строчку, ввести численное значение и нажать клавишу **Enter.**
3) Изменить начальное положение курсора на фазовой плоскости или в окне кинетической кривой можно с помощью стрелок «вверх», «вниз», «вправо», «влево». Для увеличения шага после выбора направления нажать клавишу **Tab**.
4) Для просмотра уравнений нажмите **Shift+F1**.

Построение графиков

F10 строить фазовую или кинетическую кривую в прямом времени

F9 строить фазовую или кинетическую кривую в обратном времени

F8 построить оси координат

F7 очистить окно

Esc остановить счет (при отжатой клавише **Num Lock)**

Для переключения между окном «фазовая плоскость» (плоскость $Y(X)$) и окном «кинетика» ($X(t)$, $Y(t)$) в окне параметров переключаться между значениями **window 1** и **window 2.**

Завершение работы

F3 сохранение построенного графика

F2 выход из программы

Задачи к семинарам 5 и 6

5.1. Постройте фазовый портрет для каждой из систем задачи 4.1 в окрестности стационарного состояния:

а) отметьте стационарную точку на фазовой плоскости;

б) постройте главные изоклины систем, изоклины $\pm 45^\circ$;

в) определите, под каким углом фазовые траектории должны пересекать оси координат фазовой плоскости;

г) по изоклинам постройте эскиз фазового портрета, стрелкой укажите направление движения изображающей точки вдоль интегральных кривых при $t \to \infty$.

5.2. Для произвольной начальной точки на фазовом портрете задачи 5.1. постройте кинетический портрет.