Семинар 4

Система двух автономных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Решение системы двух линейных автономных ОДУ. Типы особых точек.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений

Перейдем к изучению систем уравнений. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений. В общем виде систему линейных уравнений можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \tag{4.1}$$

Анализ системы уравнений начинается с нахождения стационарных состояний. У систем вида **(4.1)** особая точка единственна, ее координаты – $(0,0)$. Исключение составляет вырожденный случай, когда уравнения можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = kax + kby. \end{cases} \tag{4.1*}$$

В этом случае все пары $(\bar{x}, \bar{y})$, удовлетворяющие соотношению $\bar{y} = -\frac{a\bar{x}}{b}$, являются стационарными точками системы (4.1*). В частности, точка $(0,0)$ также является стационарной для системы (4.1*). На фазовой плоскости (см. *Семинар 5*) в данном случае имеем прямую с коэффициентом наклона $-\frac{a}{b}$, проходящую через начало координат, каждая точка которой является особой точкой системы (4.1*) (см. таблицу 4.1, пункт 6).

Основной вопрос, на который должен отвечать результат исследования системы уравнений: устойчиво ли стационарное состояние системы, и какой характер имеет ее решение (монотонный или немонотонный).

Напомним, что решением системы уравнений (4.1) на некотором интервале времени является пара функций $x(t), y(t)$, результатом подстановки которых в оба уравнения системы является верное тождество на том же временном интервале.

Какими же должны быть функции $x(t), y(t)$, «претендующие» на то, чтобы быть решением исследуемой системы уравнений? После подстановки функций-«кандидатов» в исходные уравнения, в левой части будут стоять их производные, а в правой – сами функции. При этом должно выполнять равенство между частями уравнения. Только экспоненциальная функция $f(z) = e^z$ остается после дифференцирования функцией того же вида. Таким образом, общее решение системы уравнений (4.1) необходимо искать среди функций вида:

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t}, \; y(t) = B \cdot e^{\lambda t}, \tag{4.2}$$

где A, B, λ – некоторые неизвестные константы. Определив значения этих трех неизвестных, получим общее решение системы.

Подставим функции (4.2) в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = a \cdot \left(A \cdot e^{\lambda t} \right) + b \cdot \left(B \cdot e^{\lambda t} \right), \\ \dfrac{dy}{dt} = B \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = c \cdot \left(A \cdot e^{\lambda t} \right) + d \cdot \left(B \cdot e^{\lambda t} \right). \end{cases}$$

Сокращая на ненулевой множитель $e^{\lambda t}$, получаем:

$$\begin{cases} A \cdot \lambda = a \cdot A + b \cdot B, \\ B \cdot \lambda = c \cdot A + d \cdot B. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Система (4.3) представляет собой алгебраическую систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных A, B:

$$\begin{cases} (a - \lambda) \cdot A + b \cdot B = 0, \\ c \cdot A + (d - \lambda) \cdot B = 0. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Система уравнений (4.4) имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.5)$$

Раскрывая определитель (4.5), получаем ***характеристическое уравнение***

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \qquad (4.6)$$

Квадратное уравнение (4.6) имеет два решения λ_1 и λ_2, при которых возможны ненулевые значения констант A, B для решения (4.2) системы уравнений. Каждому из значений $\lambda_{1,2}$ соответствует свой набор констант, а ***общее решение*** системы двух дифференциальных уравнений (4.1) является суммой двух линейно-независимый решений:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y(t) = C_1 \chi_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \chi_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad \textbf{(4.7)}$$

Здесь константы $C_{1,2}$ определяются начальными условиями задачи, а коэффициенты $\chi_{1,2}$ зависят от характеристических значений $\lambda_{1,2}$ и задаются формулами:

$$\chi_1 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \quad \chi_2 = \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d}.$$

Характеристические числа $\lambda_{1,2}$ выражаются через коэффициенты линейных уравнений следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}\right). \quad \textbf{(4.8)}$$

Разберем возможные варианты значений характеристических чисел. В зависимости от знака подкоренного выражения $(a+d)^2 - 4(ad-bc)$ корни характеристического уравнения могут принимать как действительные, так и комплексные значения.

1) Оба корня характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ принимают действительные значения, если выполнено неравенство:

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) \ge 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 \ge 4(ad-bc). \quad \textbf{(4.9)}$$

а) Если $(ad-bc) < 0$,

то неравенство **(4.9)** всегда верно. Более того,

$(a+d)^2 - 4(ad-bc) > (a+d)^2$,

а это означает, что

$\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} > |(a+d)|$.

То есть, в выражении **(4.8)** к величине $(a+d)$ прибавляется (или из нее вычитается) бóльшая величина

$\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}$. Таким образом, два характеристических корня λ_1 и λ_2 будут всегда разных знаков.

б) Если $(ad-bc)>0$,

то для того, чтобы оба характеристических корня были действительными, должно выполняться неравенство $(a+d)^2 \geq 4(ad-bc)$.

В этом случае выполняется неравенство

$(a+d)^2-4(ad-bc)<(a+d)^2$ и

$\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}<\left|(a+d)\right|$.

То есть, в выражении **(4.8)** к величине $(a+d)$ прибавляется (или из нее вычитается) меньшая величина $\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}$. Таким образом, два характеристических корня λ_1 и λ_2 будут всегда одного знака. Причем знак будет совпадать со знаком выражения $(a+d)$.

2) Оба корня характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ принимают комплексно-сопряженные значения, если выполнено неравенство:

$$(a+d)^2-4(ad-bc)<0 \Leftrightarrow (a+d)^2<4(ad-bc).$$

В этом случае характеристические числа задаются формулой:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left((a+d)\pm i\cdot\sqrt{\left|(a+d)^2-4(ad-bc)\right|}\right)=u\pm i\cdot v.$$

Итак, характеристические числа могут быть:

1) действительными разных знаков,
2) действительными одного знака,
3) комплексно сопряженными,
а также, в вырожденных случаях,
4) чисто мнимыми,
5) действительными совпадающими,
6) действительными, одно из которых (или оба) равно нулю.

Эти случаи определяют тип поведения решения системы ОДУ. В таблице 4.1 представлены соответствующие фазовые портреты[1].

Рассмотрим, какие фазовые траектории (поведение решения системы уравнений) имеют место в случаях 1–4.

1) При действительных значениях $\lambda_{1,2}$ каждое слагаемое в выражениях для общего решения (4.7) системы дифференциальных уравнений представляет собой монотонную функцию, возрастающую (для положительного значения λ) или убывающую (для отрицательного значения λ). В данном случае в общую формулу и для $x(t)$, и для $y(t)$ входит один возрастающий и один убывающий член. Таким образом, на временном интервале от $-\infty$ до $+\infty$ фазовые траектории всегда будут сначала приближаться к стационарной точке $(0,0)$, а затем от нее удаляться. Стационарное состояние в этом случае – неустойчивое, а тип поведения фазовых траекторий называется ***седло***.

[1] Определение терминов ***фазовый портрет*** и ***фазовая траектория***, а также методы построения фазового портрета – см. *Семинар 5*.

2) При положительных значениях $\lambda_{1,2}$ решение **(4.7)** системы представляет собой монотонную функцию, каждая входящая в него экспонента возрастает. С течением времени фазовые траектории удаляются от стационарной точки $(0,0)$. Такой тип поведения фазовых траекторий называется ***неустойчивый узел***; при отрицательных значениях $\lambda_{1,2}$ решение **(4.7)** системы представляет собой монотонную функцию, каждая входящая в него экспонента убывает. С течением времени фазовые траектории стремятся к стационарной точке $(0,0)$. Такой тип поведения фазовых траекторий называется ***устойчивый узел***.

3) Пусть корни характеристического уравнения принимают комплексно-сопряженные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm i \cdot \sqrt{\left|(a+d)^2 - 4(ad-bc)\right|}\right) = u \pm i \cdot v \,.$$

Тогда решение системы, например для $x(t)$, имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{t(u+i\cdot v)} + C_2 e^{t(u-i\cdot v)} = C_1 e^{tu} e^{i\cdot vt} + C_2 e^{tu} e^{-i\cdot vt} =$$

$$= e^{tu}(C_1 e^{i\cdot vt} + C_2 e^{-i\cdot vt}) = e^{tu} \cdot \left(C_1(\cos vt + i \sin vt) + C_2(\cos vt - i \sin vt)\right),$$

или

$$x(t) = e^{tu} \cdot \left((C_1 + C_2) \cdot \cos vt + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin vt\right). \qquad \textbf{(4.10)}$$

Значение функции $x(t)$ в каждый момент времени t является действительным, поэтому в правой части выражения **(4.10)** должно быть так же действительное выражение. Это требование будет выполнено, если мнимая часть

$$(C_1 - C_2) \cdot e^{ut} \cdot \sin vt = 0$$

для любого t, а действительная часть

$$(C_1 + C_2) \cdot e^{ut} \cdot \cos vt \neq 0 .$$

Такая ситуация возможна в двух случаях:

а) константы C_1 и C_2 действительные и $C_1 = C_2$. Тогда решение имеет вид

$$x(t) = 2C_1 e^{tu} \cos vt \qquad \textbf{(4.11)}$$

б) константы C_1 и C_2 – комплексно-сопряженные, т.е. их можно представить в виде: $C_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $C_2 = \alpha_1 - i\beta_1$. Тогда решение имеет вид

$$x(t) = 2e^{tu} \cdot \left(\alpha_1 \cos vt - \beta_1 \sin vt\right) \qquad \textbf{(4.12)}$$

Первый множитель в выражениях (4.11 – 4.12) при $t \to \infty$ либо стремится к бесконечности (при положительных значениях $u = a + d$), либо стремится к 0 (при отрицательных значениях $u = a + d$). Второй множитель является ограниченной величиной ($\left|\sin vt\right| \leq 1$, $\left|\cos vt\right| \leq 1$, $\alpha_1,\ \beta_1,\ C_1$ – константы), значения которой меняются периодически. Таким образом, решение $x(t)$ либо бесконечно удаляется от стационарного состояния $\bar{x} = 0$, либо стремится к нему. Однако, в отличие от рассмотренных случаев 1) и 2), поведение решения $x(t)$ не является монотонным, представляет собой затухающие или нарастающие колебания (множитель e^{ut} обеспечивает либо постоянно уменьшающуюся, либо постоянно увеличивающуюся с течением времени амплитуду колебаний). Аналогичные рассуждения справедливы и для функции-решения $y(t)$.

4) Пусть корни характеристического уравнения принимают чисто мнимые значения: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\pm i \cdot \sqrt{\left|(a+d)^2 - 4(ad-bc)\right|}\right) = \pm i \cdot v$. Тогда, аналогично рассмотренному случаю 3) решение системы, например для $x(t)$, имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{i \cdot vt} + C_2 e^{-i \cdot vt} = C_1(\cos vt + i \sin vt) + C_2(\cos vt - i \sin vt),$$

или

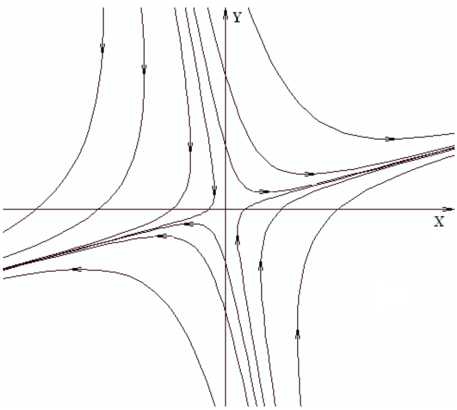
$$x(t) = (C_1 + C_2) \cdot \cos vt + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin vt,$$

$$x(t) = 2[\alpha_1 \cos vt - \beta_1 \sin vt] \text{ или } x(t) = 2C_1 \cos vt \qquad \textbf{(4.13)}$$

Выражение в правой части **(4.13)** представляет собой ограниченную периодическую функцию. Амплитуда колебаний определяется константами α_1, β_1, C_1. Таким образом, решение $x(t)$ совершает колебания около стационарного значения $\bar{x} = 0$, не удаляясь от него, но и не приближаясь (для каждой начальной точки амплитуда колебаний постоянна). Аналогичные рассуждения справедливы и для функции-решения $y(t)$.

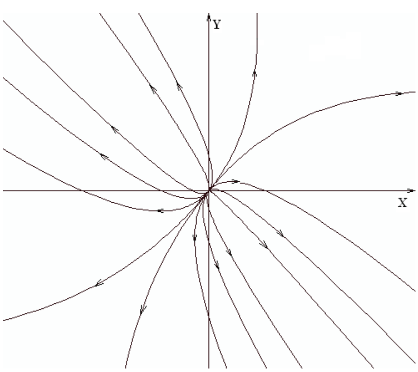
Таблица 4.1. Типы стационарных состояний системы двух линейных дифференциальных уравнений и соответствующие фазовые портреты.

1. $\lambda_{1,2}$ – действительные, разных знаков



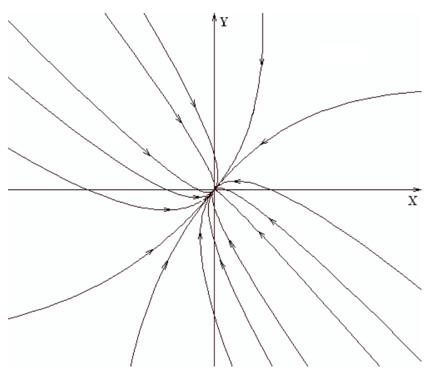
седло

2. $\lambda_{1,2}$ – действительные, одного знака



неустойчивый узел

$\lambda_{1,2} > 0$

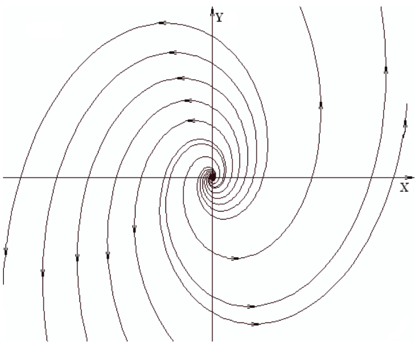


устойчивый узел

$\lambda_{1,2} < 0$

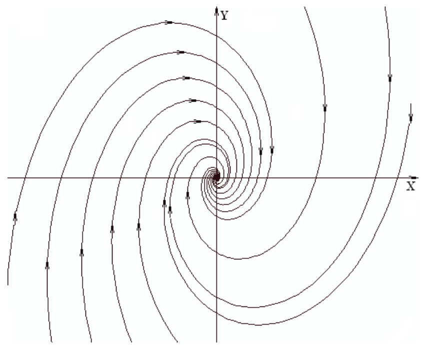
Таблица 4.1. Продолжение.

3. $\lambda_{1,2}$ – комплексные, вещественная часть отлична от нуля



неустойчивый фокус

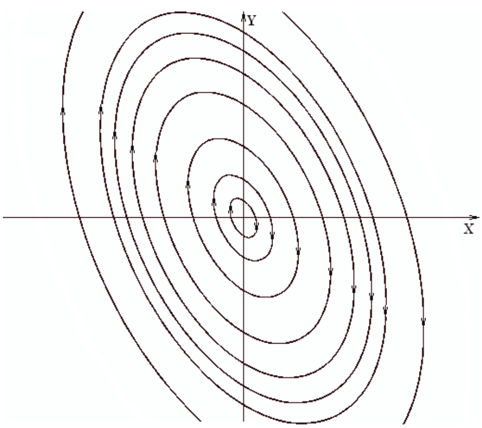
$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$



устойчивый фокус

$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$

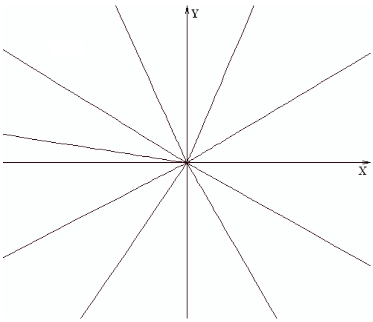
4. $\lambda_{1,2}$ – чисто мнимые



центр

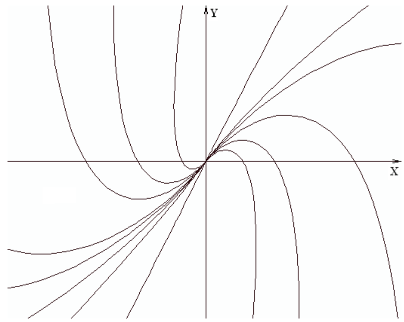
Таблица 4.1. Окончание.

5. $\lambda_{1,2}$ – действительные, совпадающие



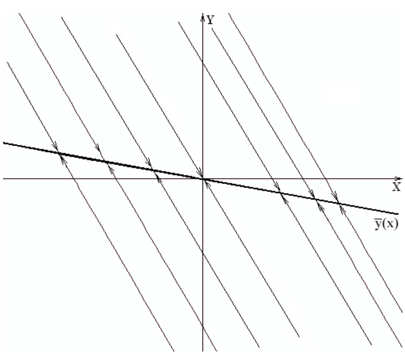
дикритический узел
устойчивый или неустойчивый, система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay \end{cases}$$



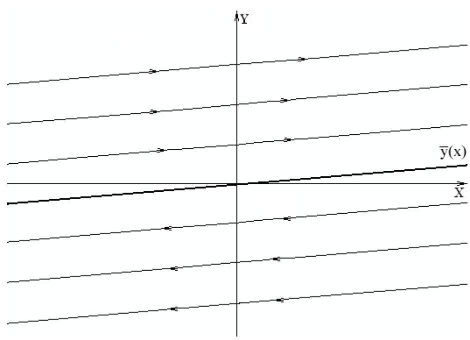
вырожденный узел
устойчивый или неустойчивый

6. λ_1 – действительный, $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$



$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

особыми точками являются все точки прямой $\overline{y}(x)$



$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

особыми точками являются все точки прямой $\overline{y}(x)$

Задачи к семинару 4

4.1. Определите тип особой точки системы линейных уравнений:

№ 1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}$

№ 2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$

№ 3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

№ 4 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$

№ 5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

№ 6 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$

№ 7 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$

№ 8 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$

№ 9 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

№ 10 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 5y \end{cases}$

№ 11 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

№ 12 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$

№ 13 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$

№ 14 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y \end{cases}$

№ 15 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y \end{cases}$

№ 16 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

№ 17 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

№ 18 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$