Семинар 4

Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Фазовая плоскость. Фазовый портрет. Кинетические кривые. Особые точки. Устойчивость стационарного состояния. Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния. Устойчивость по Ляпунову. Характеристическое уравнение. Собственные числа. Собственные вектора. Метод изоклин. Типы особых точек. Бифуркационная диаграмма.

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \tag{4.1}$$

Решением системы двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений является любая функция, удовлетворяющая этой системе.

Фазовой плоскостью называется плоскость с осями координат, на которых отложены значения переменных x и y, каждая точка плоскости соответствует определенному состоянию системы.

Совокупность точек на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных $x(t)$, $y(t)$ согласно заданным уравнениям исследуемой системы, называется ***фазовой траекторией***.

Совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных дает ***фазовый портрет*** системы.

Построение фазового портрета позволяет сделать выводы о характере изменений переменных x и y *без знания аналитических решений исходной системы уравнений*. Выражение для фазовых траекторий в аналитическом виде можно получить, разделив второе из уравнений системы (4.1) на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}. \tag{4.2}$$

Решение этого уравнения $y = y(x, c)$, или в неявном виде $F(x, y) = c$, где c — постоянная интегрирования, дает семейство интегральных кривых уравнения (4.2) — фазовых траекторий системы (4.1) на плоскости XOY.

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ

Точка $(\overline{x}, \overline{y})$, в которой производные по времени переменных x и y одновременно обращаются в нуль, является ***особой точкой* (*точкой покоя*)**.

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\overline{x},\overline{y}} = P(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\overline{x},\overline{y}} = Q(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Особая точка дифференциальных уравнений фазовых траекторий (4.2) соответствует ***стационарному состоянию системы*** (4.1).

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим характер поведения переменных при некотором небольшом отклонении системы от состояния равновесия $(\overline{x}, \overline{y})$. Введем новые переменные ξ, η, определив их как смещения относительно равновесных значений переменных:

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \xi, \\ y &= \overline{y} + \eta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставив эти выражения в (4.1), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} + \dfrac{d\xi}{dt} = P(\overline{x}+\xi, \overline{y}+\eta), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} + \dfrac{d\eta}{dt} = Q(\overline{x}+\xi, \overline{y}+\eta). \end{cases} \qquad (4.4)$$

Так как $\overline{x}, \overline{y}$ — координаты особой точки, то $\dfrac{d\overline{x}}{dy} = \dfrac{d\overline{y}}{dt} = 0$, тогда система уравнений относительно ξ и η будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = P(\overline{x}+\xi, \overline{y}+\eta), \\ \dfrac{d\eta}{dt} = Q(\overline{x}+\xi, \overline{y}+\eta). \end{cases} \qquad (4.5)$$

Предположим, что функции P и Q непрерывны и имеют n-е производные в точке $(\xi_0, \eta_0) = (0, 0)$. Тогда мы можем разложить правые части уравнений (4.5) в ряд Тейлора по переменным ξ, η.

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = P(\overline{x}, \overline{y}) + a\xi + b\eta + (p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots), \\ \dfrac{d\eta}{dt} = Q(\overline{x}, \overline{y}) + c\xi + d\eta + (q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots), \end{cases} \qquad (4.6)$$

где $a = P_{\xi}'(\overline{x}, \overline{y}), \quad b = P_{\eta}'(\overline{x}, \overline{y}), \quad c = Q_{\xi}'(\overline{x}, \overline{y}), \quad d = Q_{\eta}'(\overline{x}, \overline{y}).$ (4.7)

Учтем, что по определению особой точки

$$\begin{cases} P(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \\ Q(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \end{cases}$$

и отбросим в уравнениях (4.6) нелинейные члены. Получим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, которая называется ***линеаризованной системой*** или системой первого приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \end{cases} \tag{4.8}$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Линейной системе двух дифференциальных уравнений (4.8) можно сопоставить определитель:

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.9}$$

Раскрывая определитель (4.9), получаем ***характеристическое уравнение:***

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0. \tag{4.10}$$

Корни уравнения (4.10) называются ***собственными числами*** определителя (4.9) или ***показателями Ляпунова***:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}. \tag{4.11}$$

Общее решение системы (4.8) можно представить в виде:

$$\xi(t) = C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{12}e^{\lambda_2 t}$$
$$\eta(t) = C_{21}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ ЛЯПУНОВА

Если оба корня (4.11) имеют отрицательную действительную часть, и, следовательно, все решения уравнений первого приближения (4.8) затухают, то ***состояние равновесия устойчиво***.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то есть система (4.8) имеет нарастающие решения, то ***состояние равновесия неустойчиво***.

БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА И ТИПЫ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ

Итак, характеристические числа могут быть действительными или комплексно сопряженными.

Введем обозначения:

$$\sigma = (a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad (4.12)$$

Тогда характеристическое уравнение (4.10) запишется в виде:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим плоскость $\sigma(\Delta)$ и отметим на ней области, соответствующие тому или иному типу состояния равновесия, который определяется характером корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}. \qquad (4.14)$$

Выделим следующие случаи (рис. 4.2.):

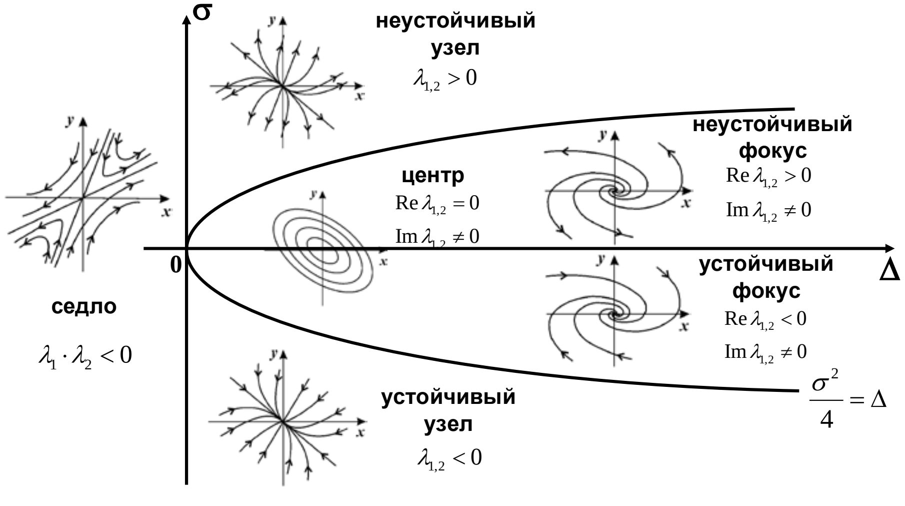


Рис. 4.2. Бифуркационная диаграмма для системы линейных уравнений (4.8).

1) λ_1 и λ_2 — действительные и разных знаков, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, особая точка — седло.	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$ определяется неравенством $\Delta < 0$.
2) λ_1 и λ_2 — действительные, $\lambda_{1,2} > 0$, особая точка — неустойчивый узел.	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$ определяется системой неравенств $\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma > 0,\\ \sigma^2 - 4\Delta > 0.\end{cases}$
3) λ_1 и λ_2 — действительные, $\lambda_{1,2} < 0$, особая точка — устойчивый узел.	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$ определяется системой неравенств $\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma < 0,\\ \sigma^2 - 4\Delta > 0.\end{cases}$
4) λ_1 и λ_2 — комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} > 0$, особая точка — неустойчивый фокус.	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$ определяется системой неравенств $\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma > 0,\\ \sigma^2 - 4\Delta < 0.\end{cases}$
5) λ_1 и λ_2 — комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} > 0$, особая точка — устойчивый фокус.	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$ определяется системой неравенств $\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma < 0,\\ \sigma^2 - 4\Delta < 0.\end{cases}$
6) λ_1 и λ_2 — комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, особая точка — центр.	Область на плоскости $\sigma(\Delta)$ определяется системой $\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma = 0.\end{cases}$

Варианты 1) – 5) описывают так называемые ***грубые состояния равновесия***.

Если действительные части одного или обоих корней характеристического уравнения равны нулю, то для грубого состояния равновесия уравнения (4.8) не дают ответа на вопрос об асимптотической устойчивости по Ляпунову, и необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений (4.6).

В итоге мы получим диаграмму разбиения плоскости параметров $\sigma(\Delta)$ на области, соответствующие различным типам состояния равновесия (рис. 4.2).

Напомним, что коэффициенты линейной системы a, b, c, d вычислялись, как соответствующие частные производные правых частей исходных нелинейных уравнений, и являются комбинациями параметров некой исходной модели. При изменении какого-либо параметра исходной нелинейной модели будут меняться и коэффициенты соответствующей линейной системы, следовательно, будут меняться величины σ, Δ. При переходе через оси координат характер фазового портрета качественно меняется. Поэтому такие границы называются бифуркационными — по разные стороны от границы система имеет два качественно различных фазовых портрета и, соответственно, два разных типа поведения.

Нужно отметить, что бифуркационными являются только переходы через оси координат, поскольку невозможно постепенным непрерывным изменением фазового портрета перейти, например, от узла к седлу или от неустойчивого фокуса к устойчивому. Переходы устойчивый узел – устойчивый фокус (неустойчивый узел – неустойчивый фокус) не являются бифуркационными, поскольку можно постепенным непрерывным изменением фазового портрета перейти от узла к фокусу.

УРАВНЕНИЯ СЕПАРАТРИС

Важными элементами фазового портрета особой точки типа «седло» являются две ***сепаратрисы***. Эти прямые всегда направлены вдоль ***собственных векторов*** матрицы коэффициентов линейных уравнений системы: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Напомним, что собственным вектором матрицы M, соответствующим собственному числу λ, называется любой отличный от нуля вектор $\vec{\mathbf{x}}$, который удовлетворяет уравнению $M\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$. Итак, уравнения прямых-сепаратрис задаются уравнениями

$$1)\left(a-\lambda_{1,2}\right)\cdot x + b\cdot y = 0$$

или

$$2)\ c\cdot x + \left(d-\lambda_{1,2}\right)\cdot y = 0\,,$$

где $\lambda_{1,2}$ — характеристические числа матрицы коэффициентов системы. Одному значению λ соответствует одна прямая. Если в выражениях 1) и 2) коэффициенты при x и y не равны нулю, то выражения 1) и 2) совпадают и задают одну и ту же прямую.

МЕТОД ИЗОКЛИН

Для построения фазового портрета пользуются *методом изоклин*: на фазовой плоскости наносят линии, которые пересекают касательные к интегральным кривым под одним определенным углом. ***Уравнение изоклины*** выводится из соотношения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = A = const\,. \tag{4.15}$$

В уравнении (4.16) константа A есть тангенс угла наклона $A = \operatorname{tg}\varphi$ касательной к фазовой траектории. Через ***главные изоклины*** (нуль-изоклины) касательные к фазовым траекториям проходят под углом $\varphi = 0^\circ$ (***изоклина горизонтальных касательных***) и $\varphi = 90^\circ$ (***изоклина вертикальных касательных***).

Для изоклины горизонтальных касательных уравнение (4.15) принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \text{ или } Q(x,y) = 0.$$

Для изоклины вертикальных касательных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty \text{ или } P(x,y) = 0.$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ФАЗОВОГО И КИНЕТИЧЕСКОГО ПОРТРЕТОВ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases} \qquad (4.16)$$

Координаты особой точки: $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$.

Коэффициенты линейных уравнений равны: $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $d = -1$.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{(a+d)}{2} + \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - (ad - bc)} = i\sqrt{12},$$

$$\lambda_2 = \frac{(a+d)}{2} - \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - (ad - bc)} = -i\sqrt{12}.$$

Корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми, следовательно, особая точка рассматриваемой линейной системы относится к типу «центр».

Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = x$.

Уравнение изоклины вертикальных касательных: $y = \frac{1}{4}x$.

Найдем уравнение изоклины касательных к траекториям системы, имеющим угол наклона 45° к оси абсцисс: $\frac{x-y}{x-4y} = 1, \quad x - y = x - 4y, \quad y = 0$ (ось OX).

Найдем, под каким углом касательные к фазовым траекториям пересекают координатные оси. Для этого в выражение $\frac{x-y}{x-4y} = \operatorname{tg}\varphi$ подставляем $x = 0$ ($\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4}$ для оси OY) и $y = 0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 1$ для оси OX).

Траектории системы — вложенные эллипсы, пересекающие изоклины. В точках пересечения касательные к эллипсам имеют соответствующие углы к оси абсцисс (рис. 4.3).

Определим направление движения по найденным траекториям. Это можно сделать следующим образом. Выберем произвольную изображающую точку на фазовой плоскости, например, $(x,y) = (1,1)$. Подставим координаты этой точки в систему уравнений. Получим выражения для скоростей изменения переменных x, y в этой точке:

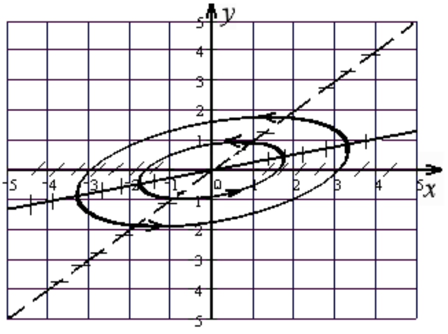
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - 4 \cdot 1 = -3, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получившиеся значения скоростей нам показывают: в точке $(x,y) = (1,1)$ значение переменной x уменьшаться, а значение переменной y не изменяется.

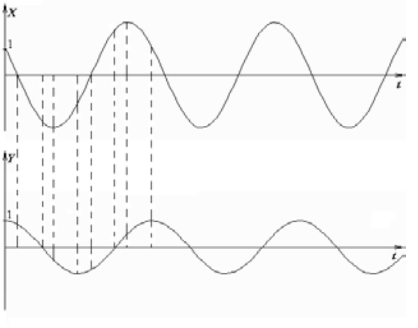
Отмечаем полученное направление стрелкой (в данном случае против часовой стрелки). Для более сложного типа портрета можно определить направление в нескольких точках фазовой плоскости.

Для построения кинетического портрета по фазовому вновь выбираем на фазовой плоскости точку, например $(x,y) = (1,1)$, и, двигаясь по траектории с учетом ее направления, определяем координаты промежуточных точек, которые затем откладываем на графиках $x(t)$ и $y(t)$

Фазовый и кинетический портреты будут иметь вид, представленный на рис. 4.3.



а)



б)

Рис. 4.3. Фазовый (а) и кинетический (б) портреты системы (4.16). Фазовый портрет построен при разных начальных условиях. Кинетический портрет построен при начальном условии $(x_0, y_0) = (1,1)$.

ЗАДАНИЕ 4.1.

В программе для численного решения ОДУ постройте фазовый и кинетический портреты системы (4.16).

ЗАДАНИЕ 4.2.

Исследуйте систему уравнений:

а) $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x - y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 4x - 5y. \end{cases}$

Найдите координаты особой точки.

Вычислите корни характеристического уравнения и определите тип фазового портрета.

Постройте фазовый и кинетический портреты с помощью программы для численного решения ОДУ.

Зарисуйте эскизы портретов и укажите направление движения по траекториям.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что является фазовым пространством для системы двух дифференциальных уравнений?
2. Как находятся стационарные состояния системы двух дифференциальных уравнений?
3. Почему при исследовании на устойчивость стационарного состояния можно отбросить нелинейные члены при разложении в ряд Тейлора малого отклонения от стационарного состояния?
4. Как записать характеристическое уравнение для системы двух линейных дифференциальных уравнений?
5. Какие характеристические показатели соответствуют грубым состояниям равновесия?
6. При каких характеристических показателях в системе возникают колебательные режимы?
7. Как найти сепаратрисы седла?
8. Как определить направление траектории на фазовом портрете?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 4

4.1. Проведите линеаризацию системы уравнений в окрестности нулевого стационарного состояния (0,0).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

4.2. Для каждой системы линейных уравнений определите тип особой точки, постройте эскизы фазовых портретов с учетом нуль-изоклин и сепаратрис. Определите направление движения траекторий.

а) $\begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = x - 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 3y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -6x - 5y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$

4.3. Постройте фазопараметрическую диаграмму для модели Лотки в диапазоне $0 < k < 8$:

$$\begin{cases} x' = k - xy, \\ y' = xy - y. \end{cases}$$

Для этого

а) получите выражения для стационарных значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в зависимости от параметра k;

б) рассчитайте $\bar{y}$ для нескольких значений параметра k из заданного диапазона;

в) постройте график $\overline{y}(k)$ в заданном диапазоне параметра k.

г) рассчитав корни характеристического уравнения, отметьте на диаграмме области, где решение имеет колебательный характер и где монотонный.

4.4. Для модели Вольтерра

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(x-b) \end{cases}$$

найдите стационарные состояния и определите, к какому типу они относятся (для всех значений параметров).