Семинар 1

Дифференциальное уравнение первого порядка. Фазовое пространство. Фазовые переменные. Стационарное состояние. Устойчивость стационарного состояния по Ляпунову. Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния. Аналитический метод определения устойчивости. Графический метод определения устойчивости.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t). \tag{1.1}$$

Дифференциальное уравнение называется ***автономным***, если его правая часть не зависит явно от времени:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.2}$$

Любая непрерывная функция вида $x = x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.2), называется ***решением*** этого уравнения. Задавая различный вид функции $f(x)$ в уравнении (1.2), можно получить широкий класс моделей, описываемых одним дифференциальным уравнением.

Переменная модели — переменная величина, включенная в модель и принимающая различные значения в процессе решения биологической задачи.

Независимая переменная — переменная, значения которой не зависят напрямую от других переменных модели. В уравнении (1.2) – это время t.

Зависимая переменная — переменная, которая является функцией другой переменной модели. В уравнении (1.2) — это $x(t)$.

Параметры модели — величины, которые не изменяются в процессе поиска решения модели и обеспечивают ее адекватность исследуемой системе.

Начальное состояние модели (***начальное условие***) — значение переменной x в начальный момент времени $t = 0$.

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Фазовым называется ***пространство***, определяемое координатными осями, на которых отложены значения переменных системы, и в котором представлено множество всех состояний системы.

Значения, которые могут принимать решения системы, называются в данном случае ***фазовыми переменными***.

Состояние системы в фазовом пространстве в некоторый момент времени представляет собой точку (так называемая ***изображающая точка***).

Изменение состояния системы во времени можно представить как движение системы вдоль некоторой линии в фазовом пространстве, которая называется ***фазовой траекторией***. Для одного уравнения фазовое пространство представляет собой одну координатную ось.

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ
(ТОЧКА ПОКОЯ, ОСОБАЯ ТОЧКА, СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ)

В стационарном состоянии значения переменных в системе не меняются со временем. Это означает, что скорость изменения переменной $x(t)$ равна нулю (левая часть уравнения (1.2) равна нулю):

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{1.3}$$

Если левая часть уравнения (1.2) равна нулю, то и правая равна нулю:

$$f(x) = 0. \tag{1.4}$$

Корни алгебраического уравнения (1.4) $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ являются ***стационарными состояниями*** дифференциального уравнения (1.2).

ЗАДАНИЕ 1.1.
Найдите стационарные состояния следующих уравнений:

а) $\dfrac{dx}{dt} = V - kx$,

б) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - rx + m$,

в) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\beta + \tau x}(x - L)(x - K)$.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Для обоснования аналитического метода определения типа устойчивости (устойчивости по Ляпунову) напомним формулу Тейлора.

Говоря нестрого, формула Тейлора показывает поведение функции в окрестности некоторой точки. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные всех порядков до n-го включительно. Тогда для $f(x)$ справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Чем больше число членов разложения учитывается, тем более точно ряд Тейлора приближает поведение функции в окрестности точки x_0.

ЗАДАНИЕ 1.2.

Разложите функцию $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ до 3 порядка.

1.2.1. Представьте полученный степенной ряд в виде функции: а) $f_1(x)$, включающей четыре первых члена разложения, б) $f_2(x)$, включающей два первых члена разложения.

Используя программу для построения графиков функций, изобразите в одних координатах функции $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$.

1.2.2. Найдите интервал, на границах которого

а) $\dfrac{f(x) - f_1(x)}{f(x)} \approx 0.01$,

б) $\dfrac{f(x) - f_2(x)}{f(x)} \approx 0.01$,

то есть погрешность приближения исходной функции $f(x) = e^x$ кубичным полиномом и прямой линией не более 1%.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Состояние равновесия ***устойчиво по Ляпунову***, если, задав любое, сколь угодно малое, положительное ε, всегда можно найти такое δ, что

$$\left|x(t) - \bar{x}\right| < \varepsilon \text{ для } t_0 \le t < +\infty \text{, если } \left|x(t_0) - \bar{x}\right| < \delta .$$

Аналитический метод исследования устойчивости стационарного состояния состоит в следующем. Пусть $\bar{x}$ — стационарное состояние уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.5}$$

Зададим небольшое отклонение переменной x от ее стационарного значения: $x = \bar{x} + \xi$, такое что $\xi / \bar{x} << 1$. Подставим выражение для x в уравнение (1.5):

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = f(\bar{x} + \xi). \qquad (1.6)$$

Учитывая, что $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$, можно преобразовать уравнение (1.6) и перейти от переменной x к переменной ξ:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x} + \xi). \qquad (1.7)$$

Новая переменная $\xi(t)$ описывает поведение системы при малом отклонении от стационарного состояния $\bar{x}$.

Правая часть уравнения (1.7) указывает величину скорости, с которой отклонение $\xi(t)$ увеличивается или уменьшается.

Разложим функцию $f(\bar{x} + \xi)$ в ряд Тейлора в точке $\xi_0 = 0$:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2} f''(\bar{x})\xi^2 + \ldots$$

Учитывая, что $f(\bar{x}) = 0$, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots, \qquad (1.8)$$

где $a_1 = f'(\bar{x})$, $a_2 = f''(\bar{x})$, …

Поскольку вклад нелинейных членов в малой окрестности разложения становится пренебрежимо малым по сравнению с вкладом линейных членов, можно отбросить члены порядка 2 и выше. Получим ***линеаризованное уравнение*** или ***уравнение первого приближения***:

$$\frac{d\xi}{dt} = a \cdot \xi. \qquad (1.9)$$

Решим полученное линейное уравнение. Разделяя переменные, проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = a\int dt,$$

$$\ln \xi = a \cdot t + C.$$

Переходя от логарифмов к значениям переменной ξ и определяя произвольную постоянную C из начальных условий, получим:

$$\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{a \cdot t}, \tag{1.10}$$

где $a = f'(\overline{x})$, ξ_0 — значение переменной ξ в начальный момент времени. График функции представлен на рис. 1.1.

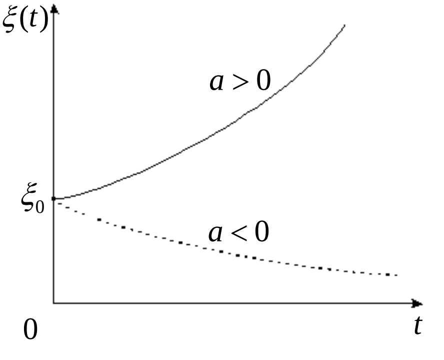


Рис. 1.1. График решения уравнения $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{a \cdot t}$.

При $a > 0$ решение является возрастающей функцией, при $a < 0$ — убывающей.

Если $a < 0$, то при $t \to \infty$ первоначальное отклонение от состояния равновесия $\xi \to 0$ и, следовательно, со временем затухает. Это означает, по определению, что состояние равновесия устойчиво.

Если же $a > 0$, то при $t \to \infty$ возмущенное решение будет удаляться от точки равновесия по экспоненте, тогда исходное состояние равновесия неустойчиво.

Если $a = 0$, то уравнение первого приближения не может дать ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия системы. Необходимо рассматривать члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора.

ЗАДАНИЕ 1.3.

Исследуйте на устойчивость стационарные состояния моделей из задания 1.1. методом Ляпунова.

а) $\dfrac{dx}{dt} = V - kx$,

б) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - rx + m$,

в) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\beta + \tau x}(x - L)(x - K)$.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ

Кроме аналитического метода исследования устойчивости стационарного состояния, существует и графический. Разберем этот способ на примере.

Пусть $\dfrac{dx}{dt} = (x-1)(x-2)(x-3)^2$. Найдем стационарные состояния уравнения и определим их тип устойчивости с помощью графика функции $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$ (рис. 1.2).

Особые точки: $\overline{x}_1 = 1$, $\overline{x}_2 = 2$, $\overline{x}_3 = 3$.

Зададим небольшое отклонение изображающей точки от особой точки $\overline{x}_1 = 1$ влево: $\overline{x}_1 - \xi$. В точке с координатой $x = \overline{x}_1 - \xi$ функция $f(x)$ принимает положительное значение: $f(\overline{x}_1 - \xi) > 0$ или $\dfrac{d(\overline{x}_1 - \xi)}{dt} > 0$.

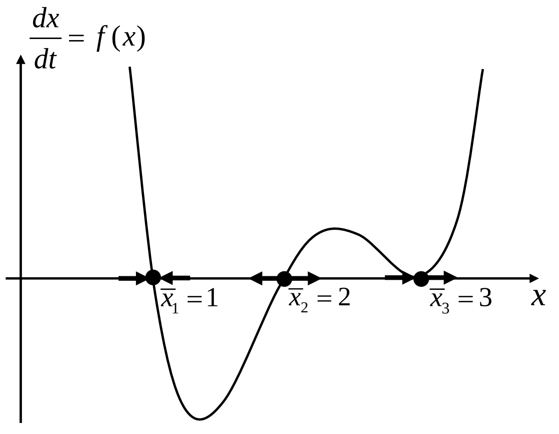


Рис. 1.2. График функции $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$.

Это неравенство означает, что со временем координата x должна увеличиваться, то есть изображающая точка должна возвращаться к точке $\bar{x}_1 = 1$. Теперь зададим небольшое отклонение изображающей точки от особой точки $\bar{x}_1 = 1$ вправо: $\bar{x}_1 + \xi$. В этой области функция $f(x)$ принимает отрицательное значение: $f(\bar{x}_1 + \xi) < 0$ или $\dfrac{d(\bar{x}_1 + \xi)}{dt} < 0$, следовательно, со временем координата x должна уменьшаться, то есть изображающая точка должна возвращаться к точке $\bar{x}_1 = 1$. Таким образом, малые отклонения от точки $\bar{x}_1 = 1$ со временем затухают, стационарное состояние $\bar{x}_1 = 1$ устойчиво.

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что любое отклонение от особой точки $\bar{x}_2 = 2$ со временем возрастает, то есть стационарное состояние $\bar{x}_2 = 2$ неустойчиво.

Анализ стационарного состояния $\bar{x}_3 = 3$ показывает, что отклонение влево затухает, тогда как отклонение вправо возрастает. Стационарное состояние $\bar{x}_3 = 3$ не является устойчивым.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что является фазовым пространством для одного дифференциального уравнения?
2. Как находятся стационарные состояния моделей, описываемых одним дифференциальным уравнением?
3. Почему при исследовании на устойчивость стационарного состояния можно отбросить нелинейные члены в разложении в ряд Тейлора малого отклонения от стационарного состояния?
4. Как определить устойчивость (неустойчивость) стационарного состояния методом Ляпунова?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 1

1.1. Для уравнений

$$\frac{dy}{dt} = yr(1 - \frac{1}{K}y);$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha\frac{\beta z^2}{\beta + \tau z} - \gamma z;$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - \gamma x - \delta x^2$$

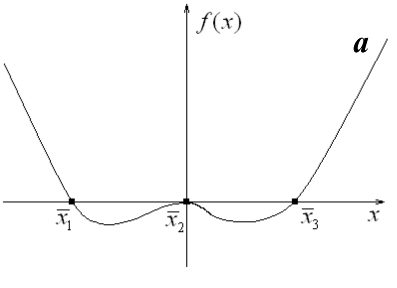
а) найдите стационарные состояния;

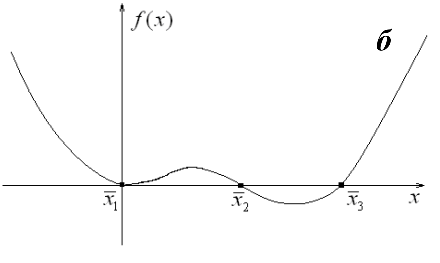
б) задайте малое отклонение ξ от стационарного состояния и запишите в общем виде уравнения для ξ;

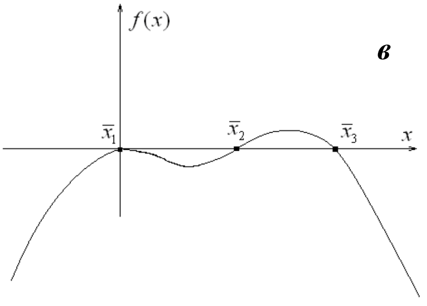
в) разложите в ряд Тейлора правые части уравнений, полученных для ξ;

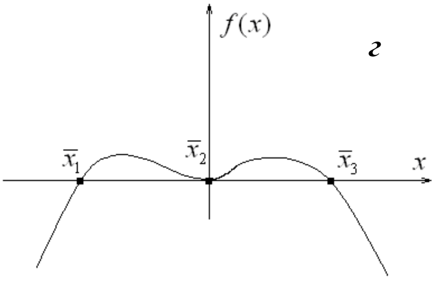
г) каждое из стационарных состояний исследуйте на устойчивость методом Ляпунова.

1.2. Пусть $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Определите по графику функции $f(x)$ устойчивость всех стационарных состояний уравнения.









1.3. Зависимость стационарного состояния от параметра называется ***фазопараметрической диаграммой***.

Постройте фазопараметрическую диаграмму для уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - bx + 1 \text{ (для } x > 0,\ b > 0\text{)}.$$

Найдите значения параметра b, при котором стационарных состояний нет; есть только одно стационарное состояние; есть два стационарных состояния.

1.4. Найдите решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 5x\left(1 - \frac{x}{100}\right), \text{ если}$$

а) $x(0) = 10$,

б) $x(0) = 150$.

Исследуйте полученные решения $x(t)$. Найдите асимптоты и точки перегиба полученных функций $x(t)$.