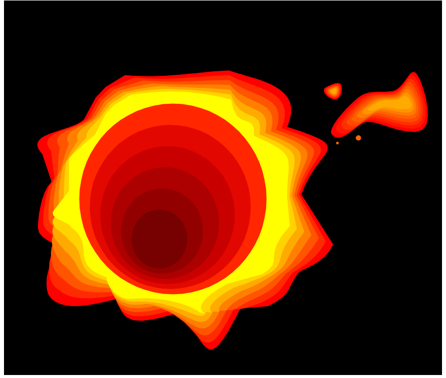
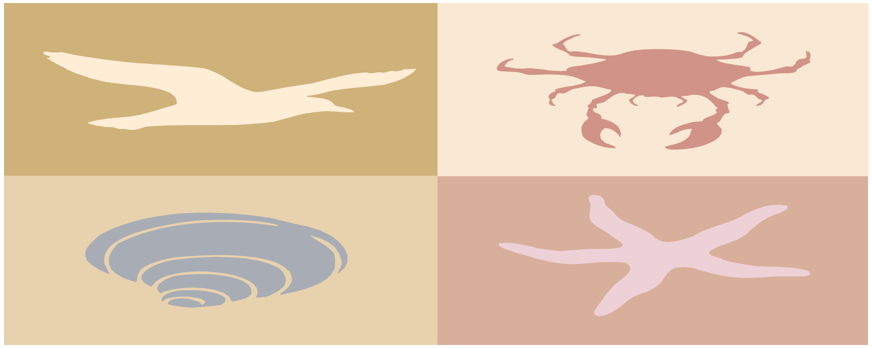
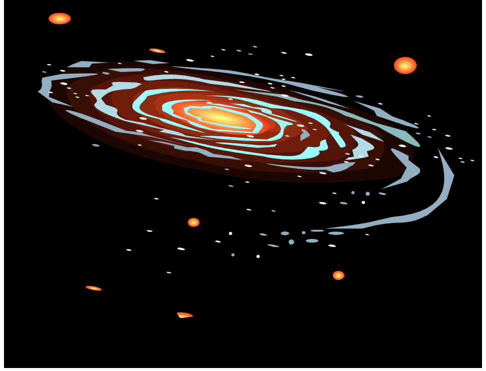






www.biophys.msu.ru

# Модели нелинейного мира

Лекция 9

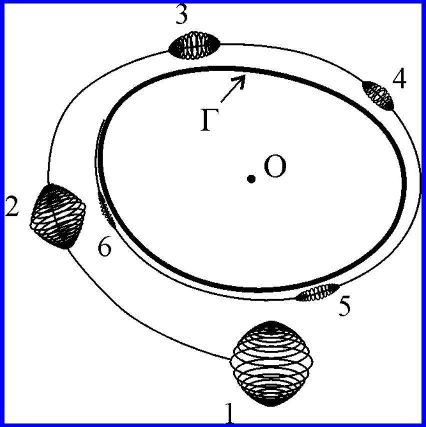
**Галина Юрьевна Ризниченко**

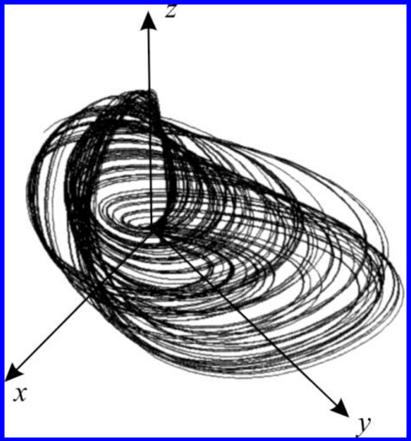
Каф. биофизики Биологического ф-та Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(095)9390289; факс:  (095)9391115;

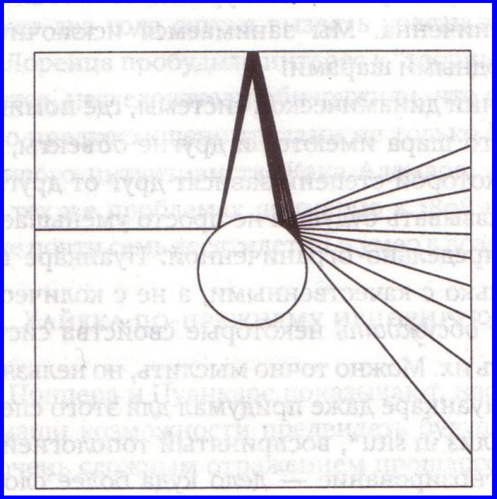
E-mail: riznich@biophys.msu.ru

mathbio.ru




Г.Ю Ризниченко



# Динамический хаос

Публий Овидий Назон (43 до н.э. – 18 н.э)

# Овидий. Метаморфозы 1.5

пер. С.В.Шервинского

Не было моря, земли и над всем распростертого неба
Лик был природы един на всей широте мирозданья, -
Хаосом звали его. Нечлененной и грубой громадой,
Бременем косным он был, - только, - где собраны были
Связанных слабо вещей семена разносущные вкупе.

# Фото Роберта Гендлера. Созвездие стрельца

- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).

- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

# Динамический хаос. Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов. Фракталы*

# χαος

# CHAOS

Александр
Юрьевич
Лоскутов
1960-2011

Weather

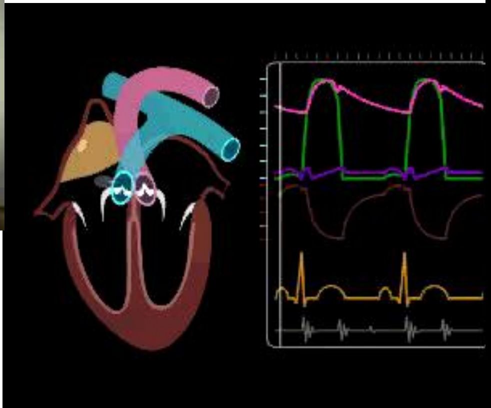
Э.Лоренц

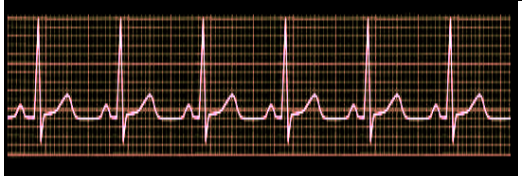
Chemical
Kinetics

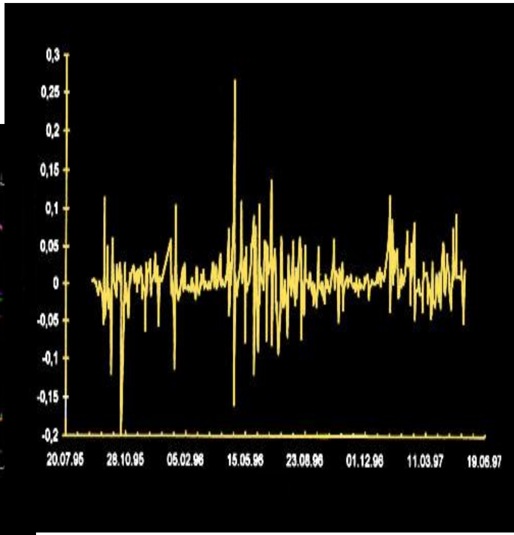
BZ-reaction

Белоусов и
Жаботинский

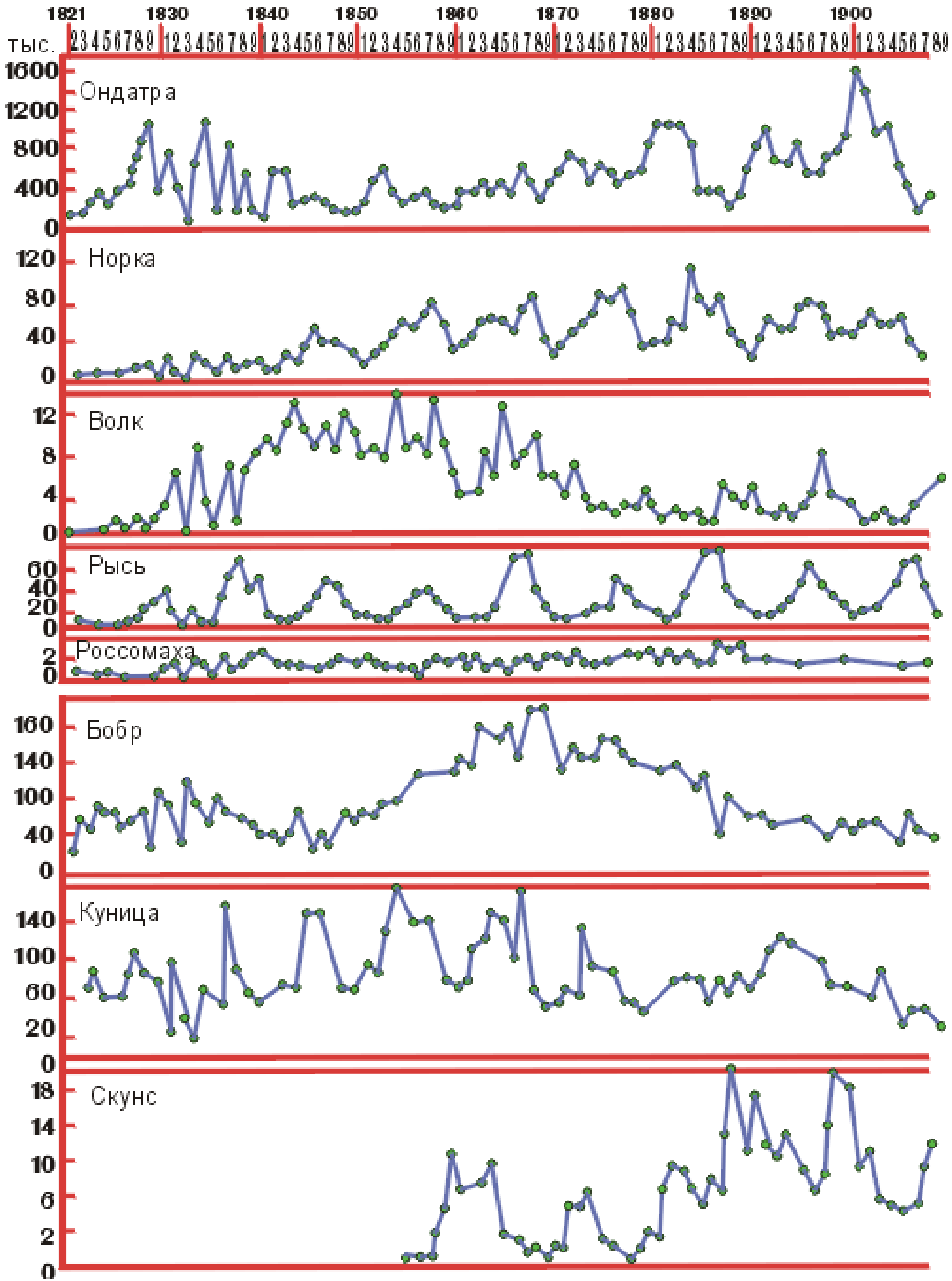
Heart rythm





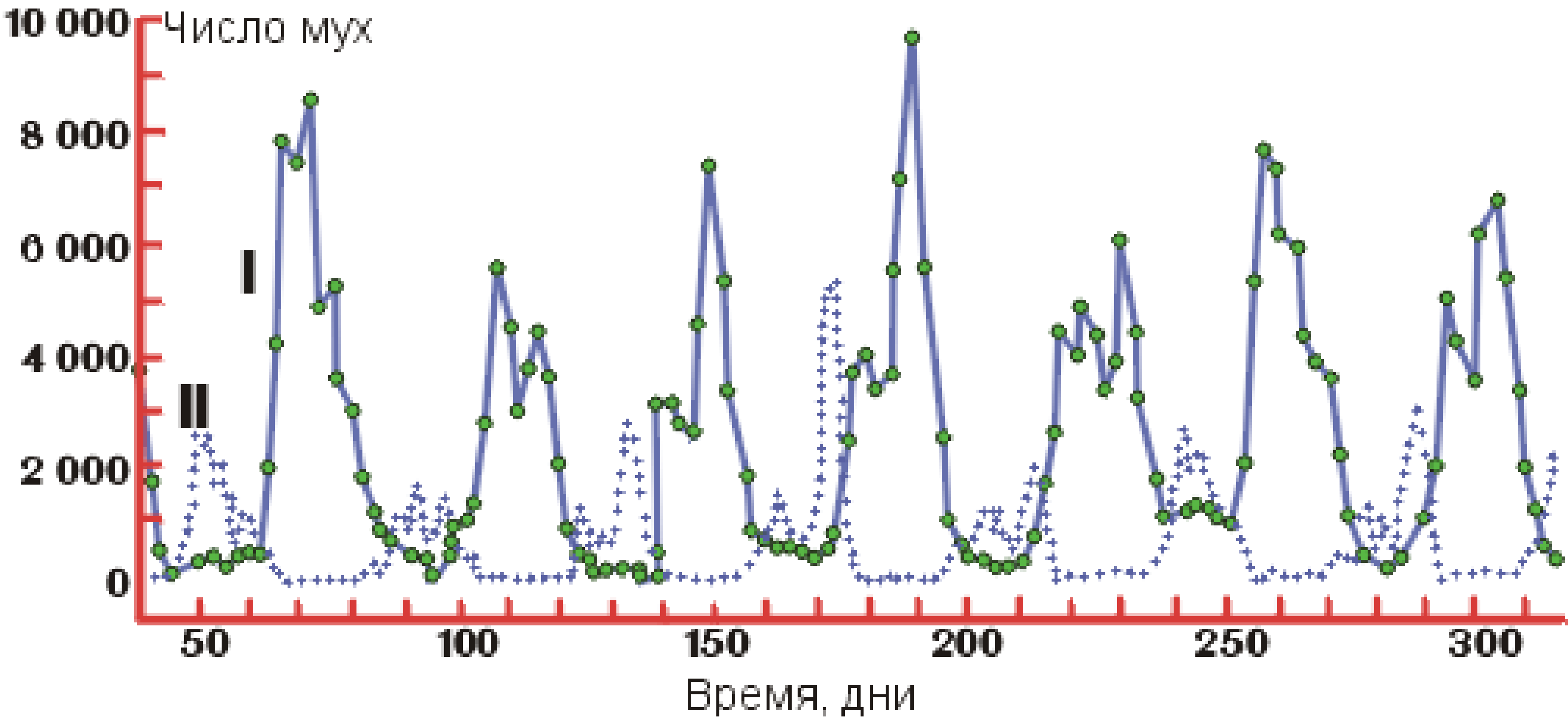



Биржевые
индексы




# Данные по заготовкам пушнины компании Гудзонова Залива

# Динамика численности плодовой мушки



# Биржевые индексы

# Индекс Доу-Джонс 1929-1933

# Анри Пуанкаре –

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать… Предсказание становится невозможным, мы имеет перед собой явление случайное».

# Лоренц

Lorenz EN (1963)
Deterministic non-periodic flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости, модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением

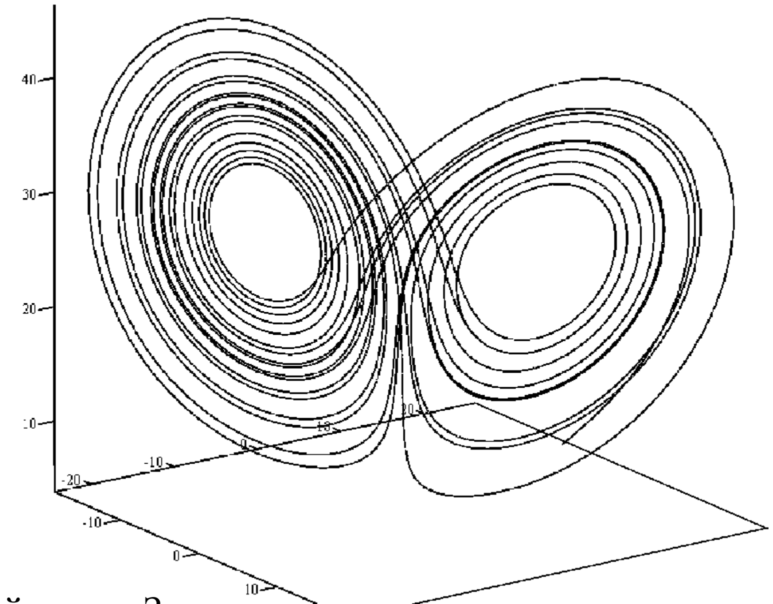
$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

r=28, s=10,
b=8/3

Хаотические траектории в системе Лоренца

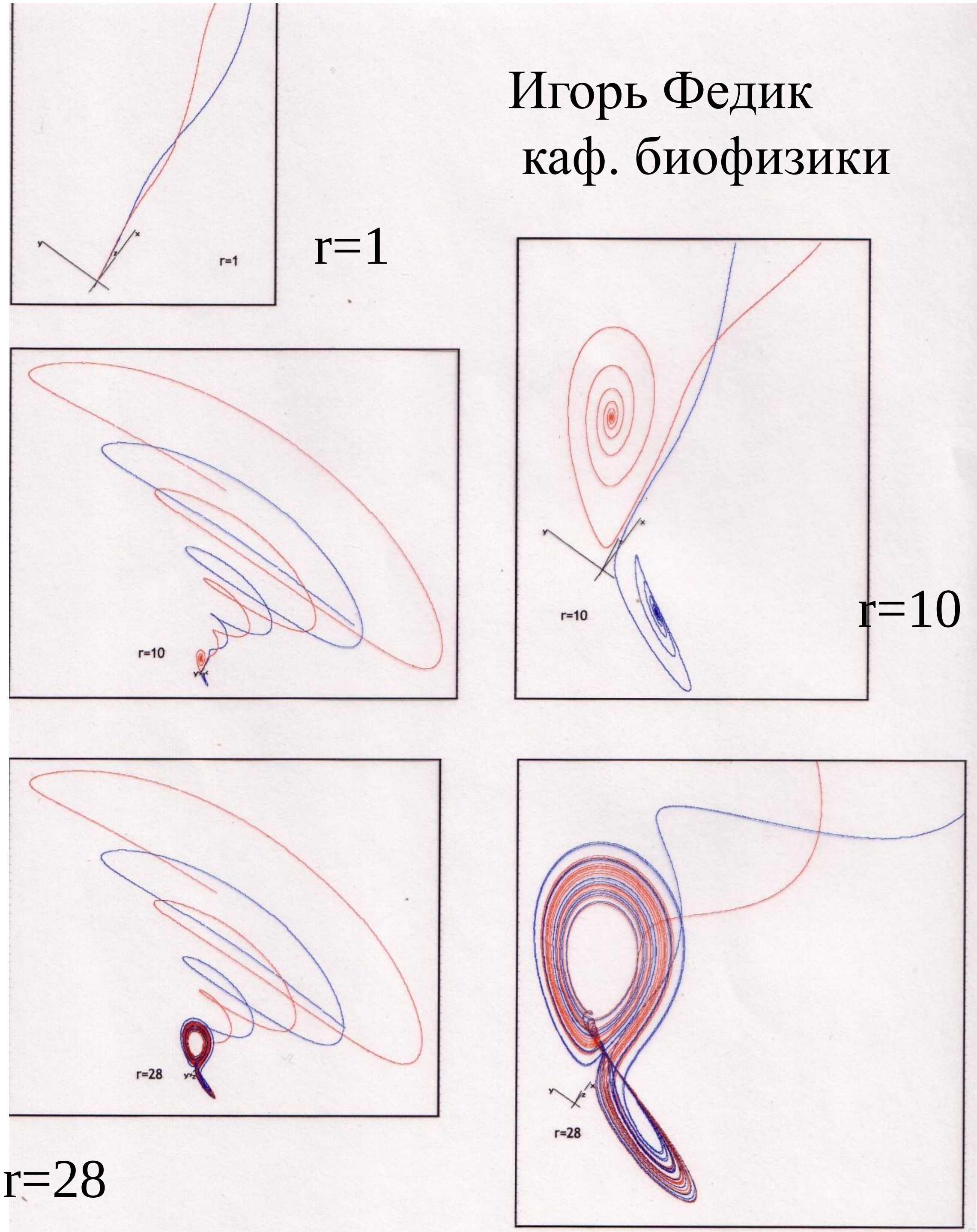


•**Одномодовый лазер.** Здесь *x* — амплитуда волн в резонаторе лазера, *y* — поляризация, *z* — инверсия населённостей энергетических уровней, *b* и σ — отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, *r* — интенсивность накачки.

$$\dot{x} = \sigma\, y - \sigma\, x,$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

# Траектории системы Лоренца при разных значениях параметра r

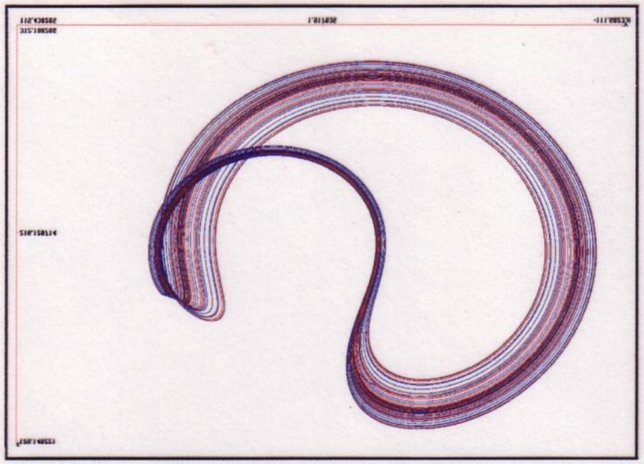
Игорь Федик
каф. биофизики

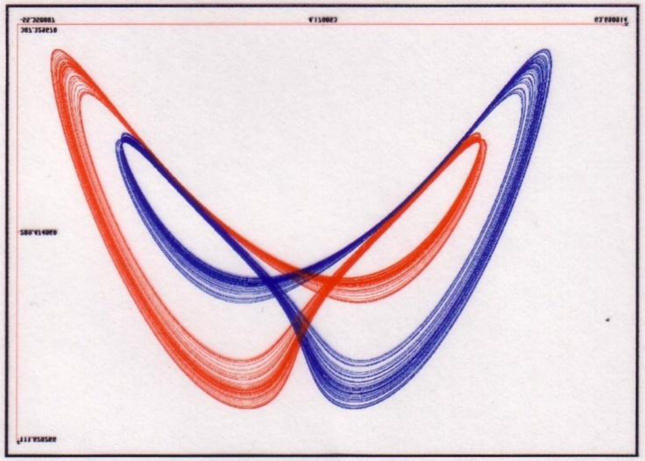


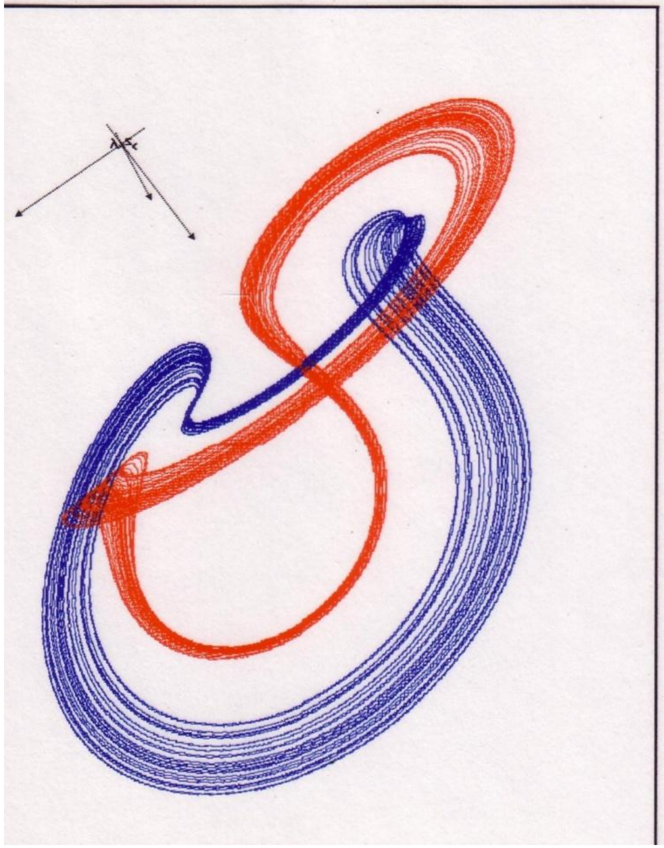
Система Лоренца 1

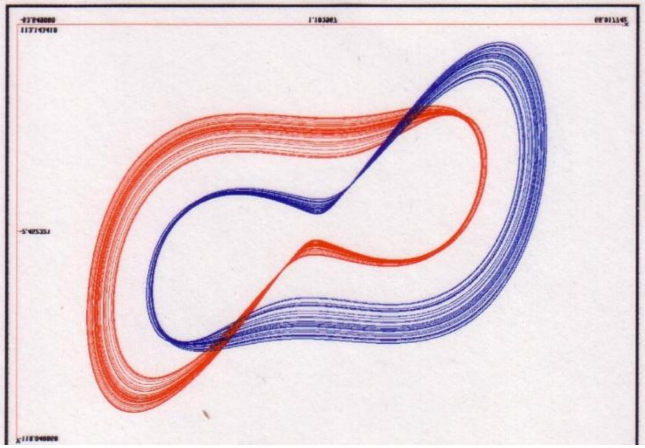
$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = xy - bz.$$

r=28, s=10, b=8/3







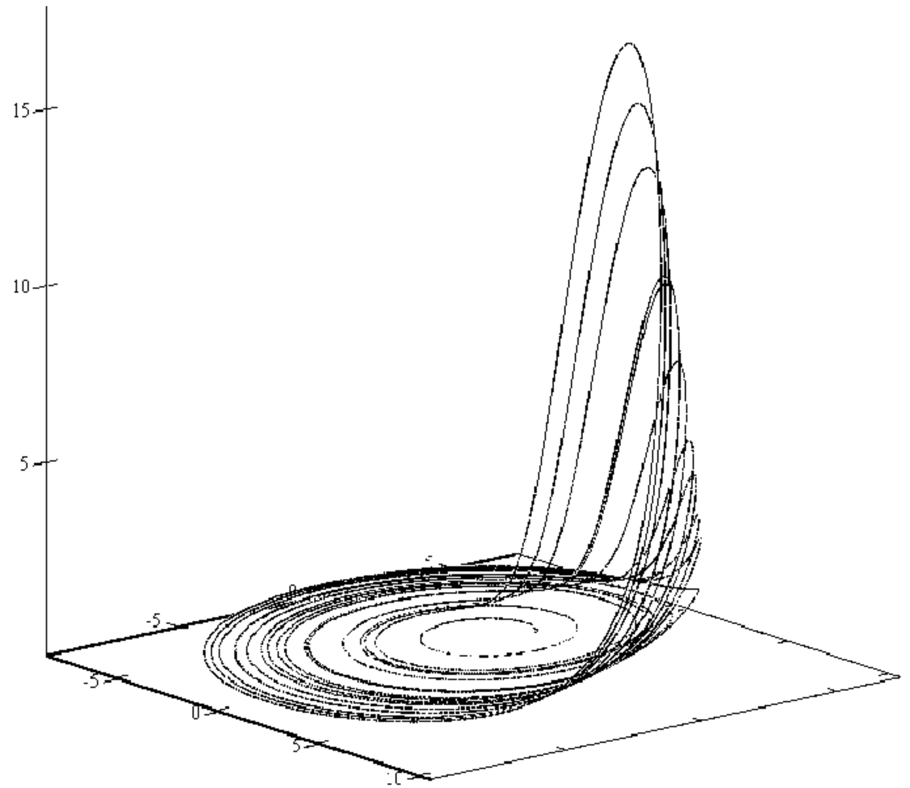


Edward Norton Lorenz
1917-2008

Американский математик и метеоролог

Один из основателей теории хаоса

# Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера




$$\dot{x} = -(x + y),$$

$$\dot{y} = x + \alpha\, y,$$

$$\dot{z} = \alpha + z(x - \mu).$$

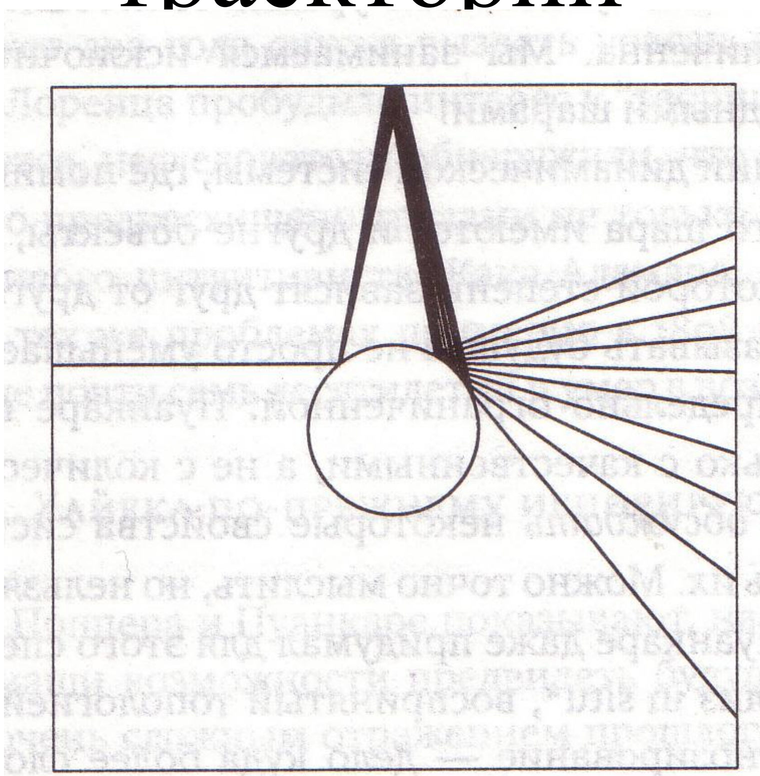
# Хаотическое поведение возникает

-  •  не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
-  •  не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
-  •  не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Потребность в определенности – естественная биологическая потребность человека, но она же – порок мышления

Разбегание траекторий



Из книги «Черный лебедь»

# Хаотическое поведение означает

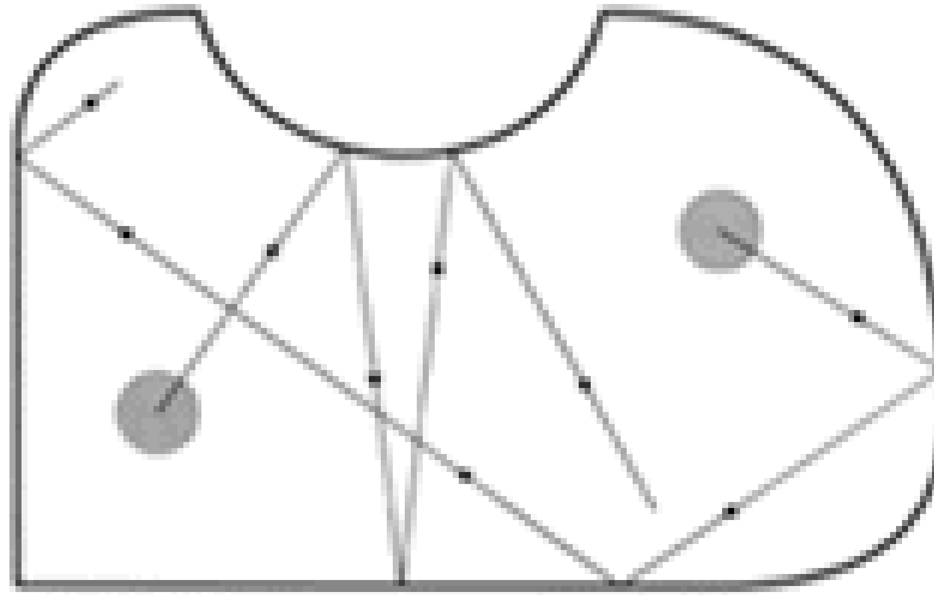
- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

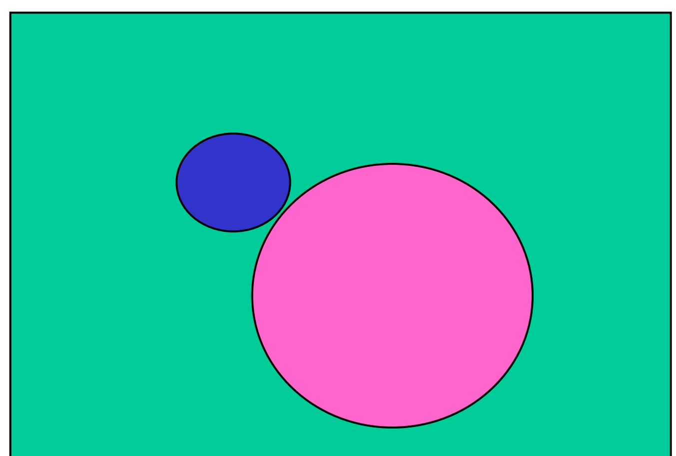
# Биллиард Синая

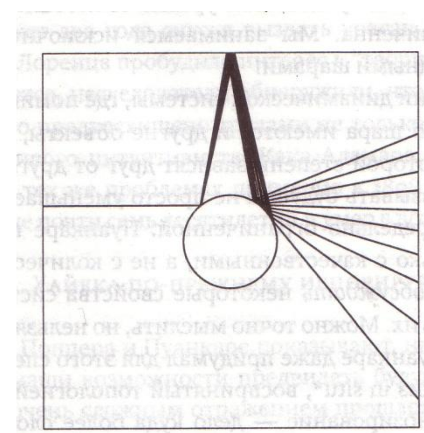
Яков Григорьевич Синай

Лауреат Абелевской премии март 2014 г.

Профессор Мехмата МГУ. Работы по теории динамических систем, статистической физике



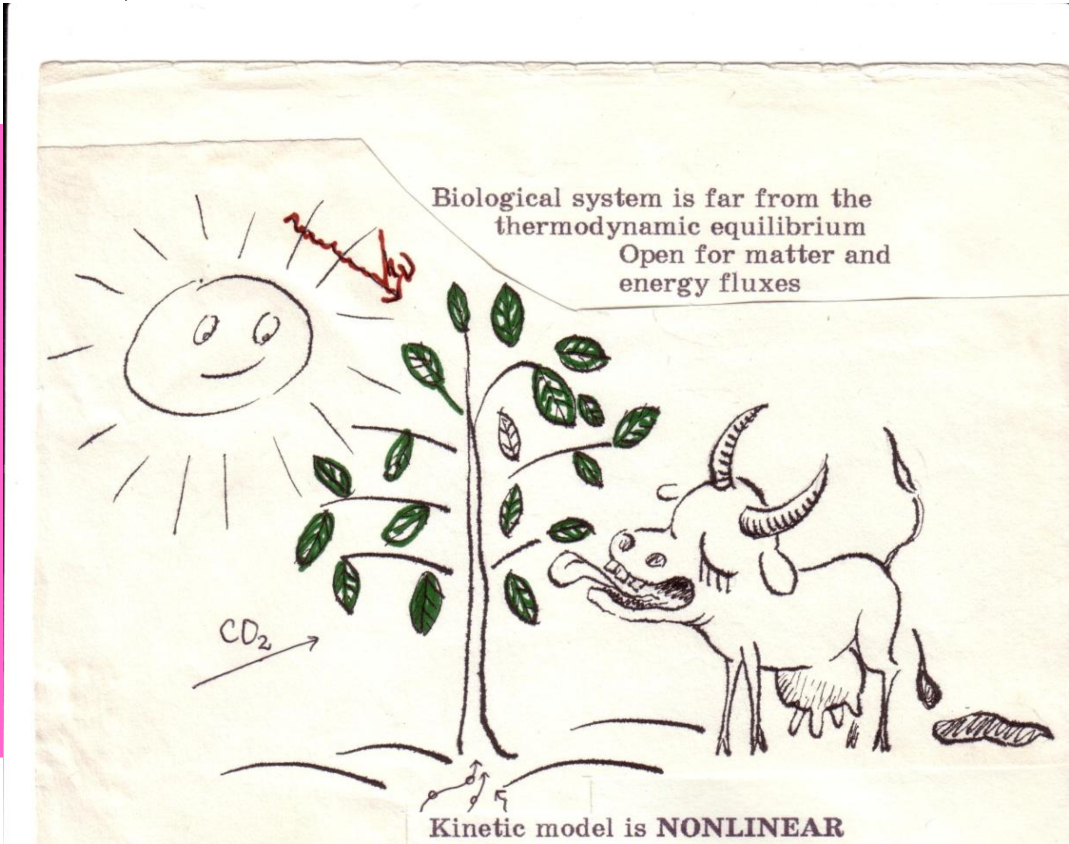




# НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (**детерминированного**) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу.



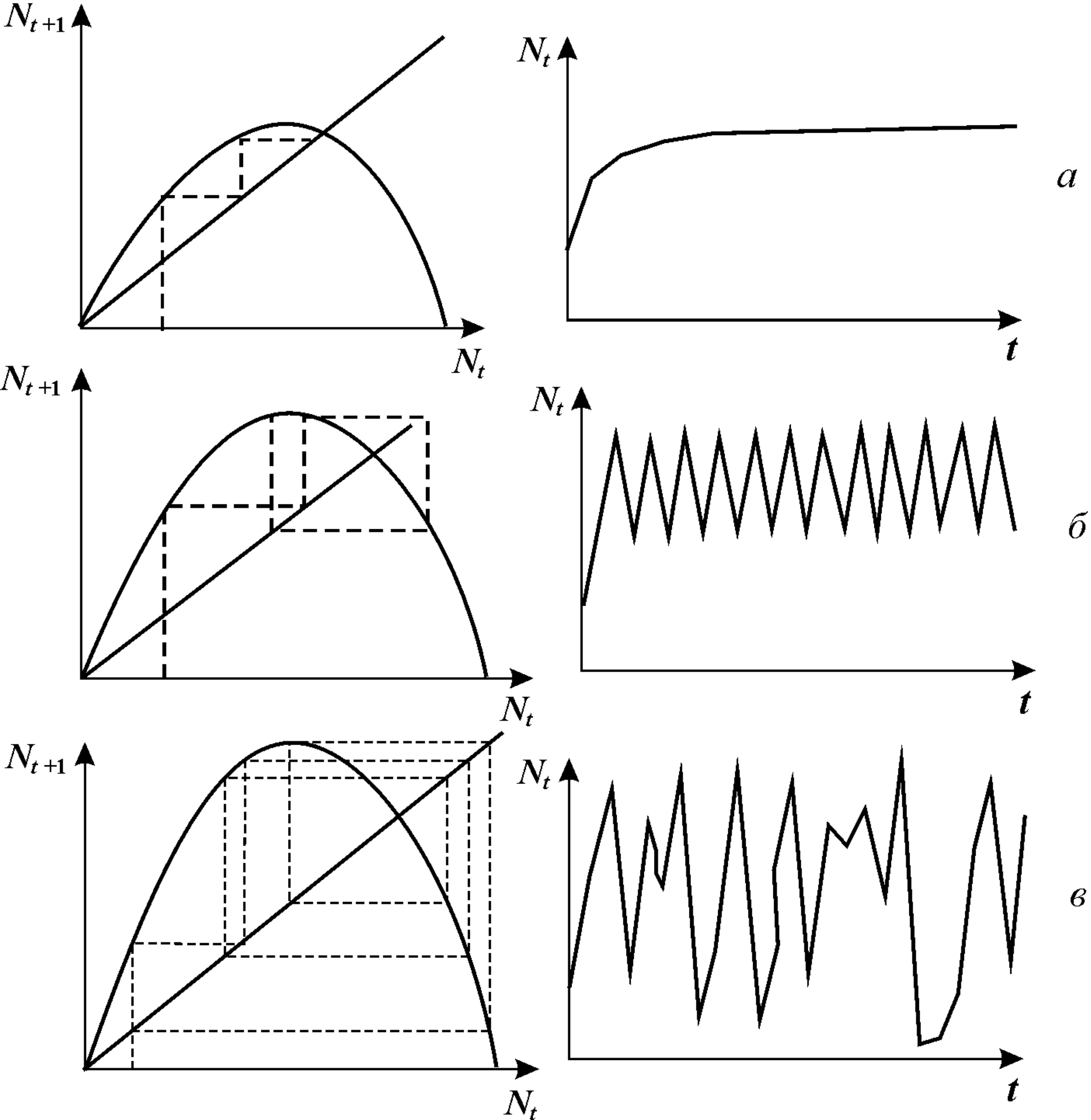
# Детерминированные системы

**однозначно** задан закон изменения системы с течением времени.

*Детерминированность* означает, что зависимость будущего состояния $x\ (t)$ можно записать в виде:

$$x(t) = F\ [x(t_0)]\ .$$

Здесь $F$ – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.



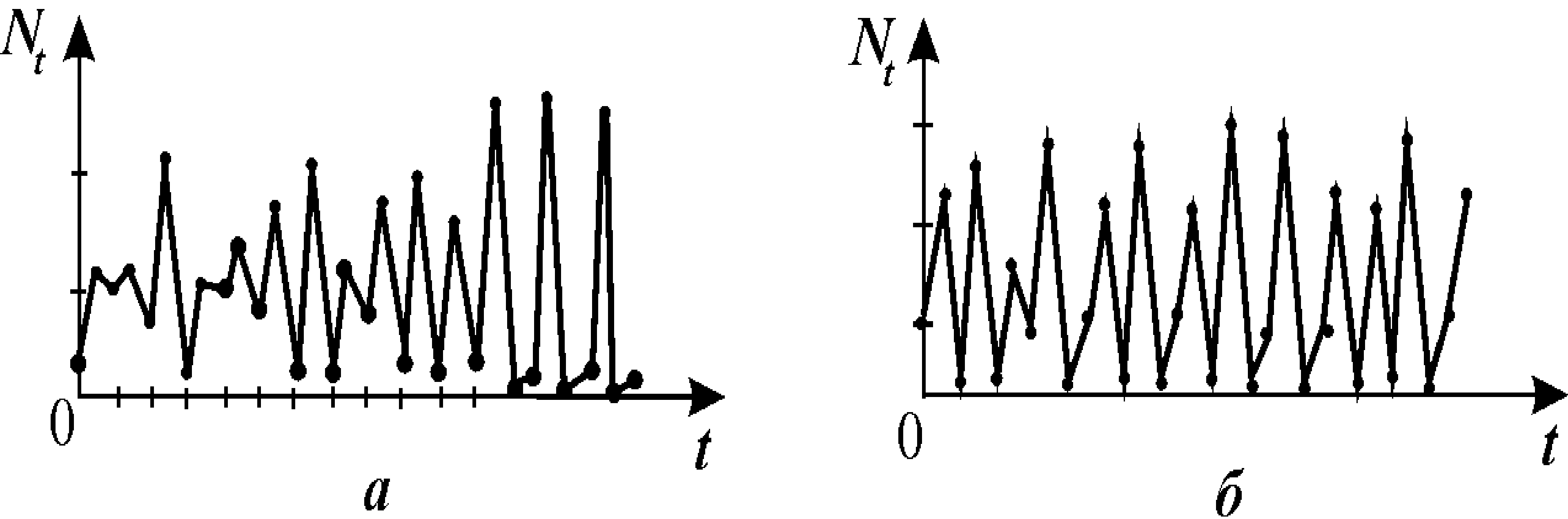

# Квадратичное отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

Пример детерминированного хаоса

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

Дискретный аналог логистического уравнения




При $r > r_c = 3{,}102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

*Равновесие устойчиво*, если $0<r<2$,

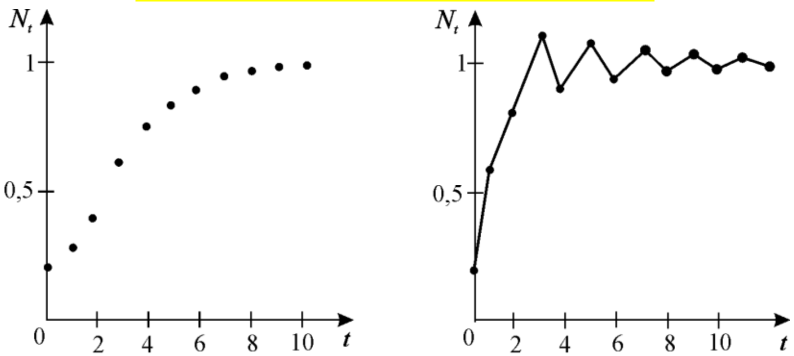
решение *монотонно* при $0 < r < 1$ и представляет собой *затухающие колебания* при $1 < r < 2$

при $2 < r = r_2 < 2{,}526$ – *двухточечные циклы;*

при $r_2 < r < r_c$ появляются *циклы длины 4,8,16,...,2k*

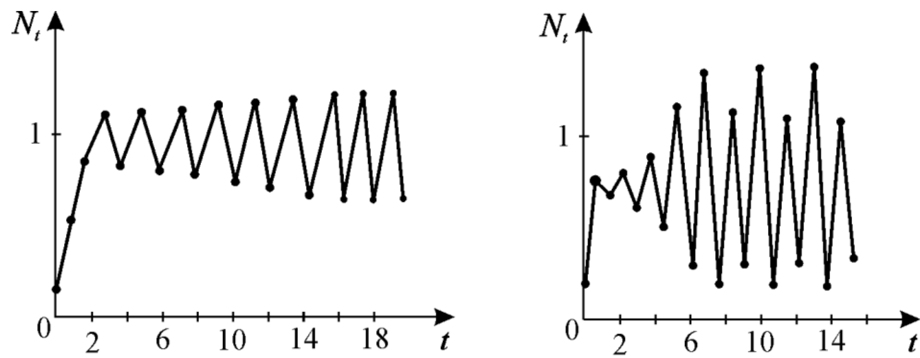
при $r > r_c=3{,}102$ решение зависит от начальных условий. Существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*

Устойчивое решение

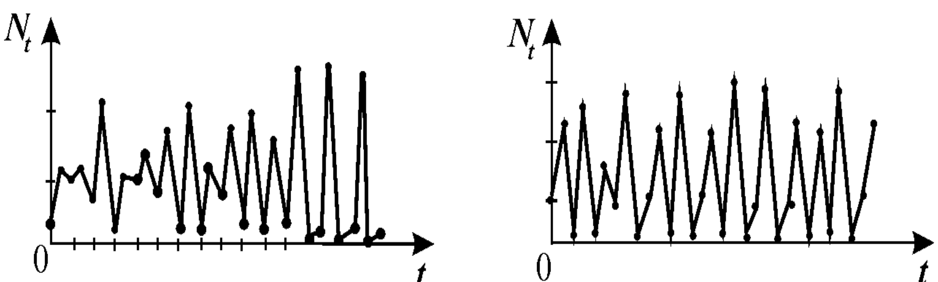


*а* *б*

Циклы длины 2k



*а* *б*

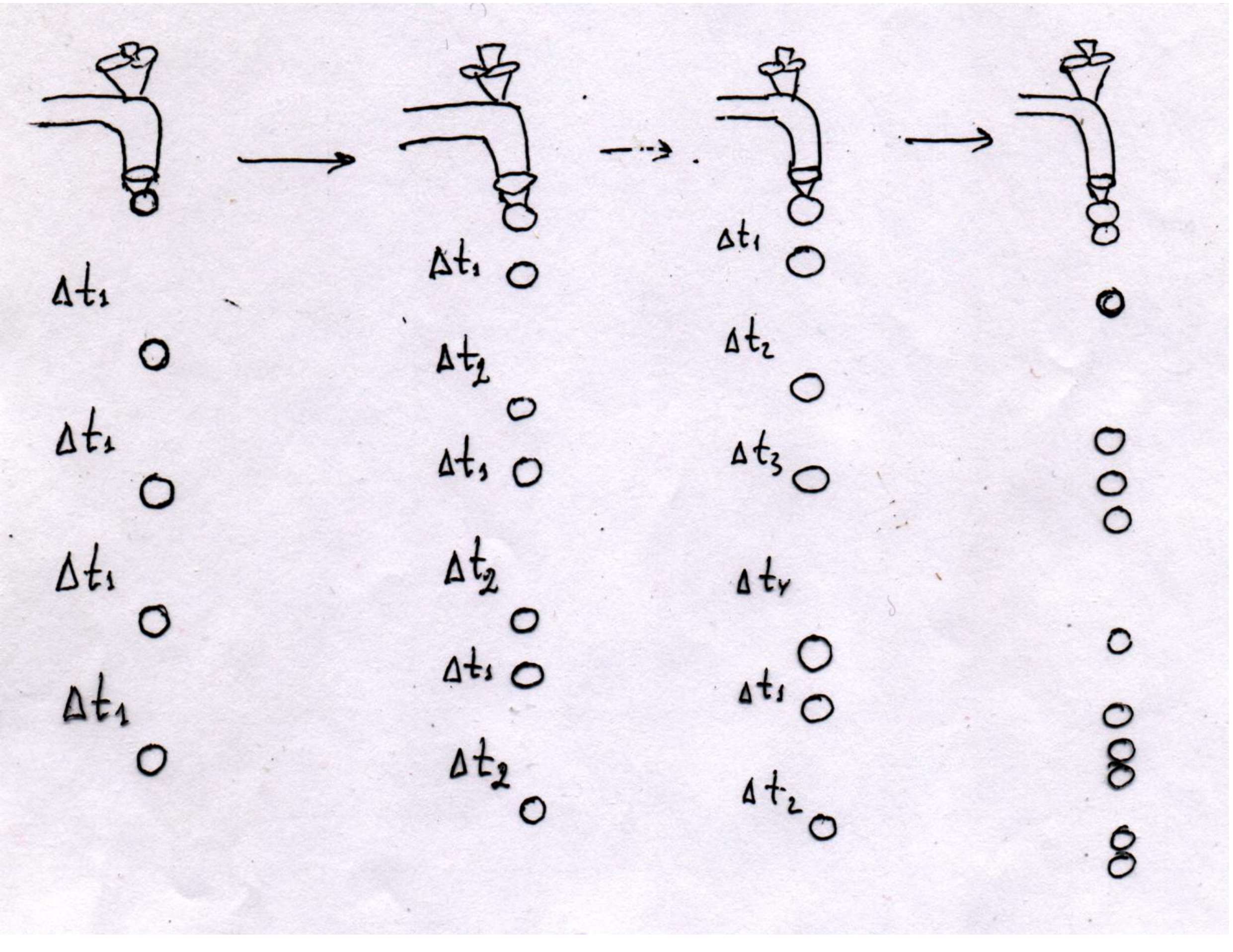


*а* *б*

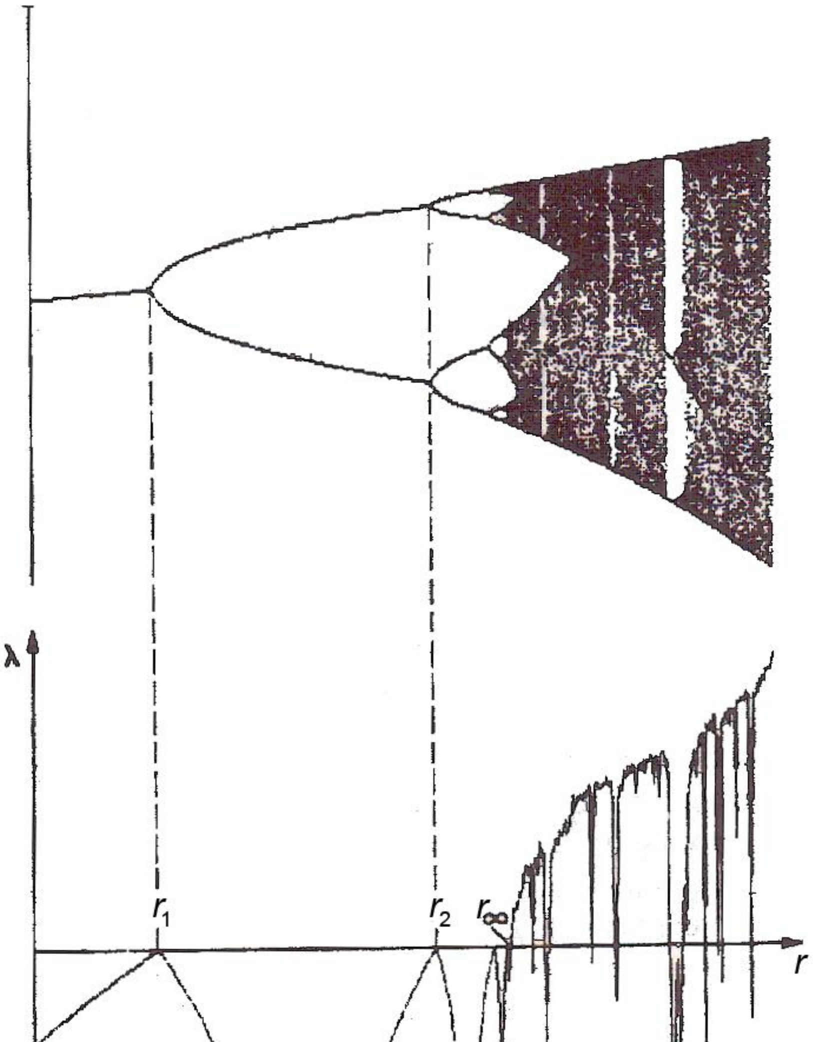
Динамический хаос

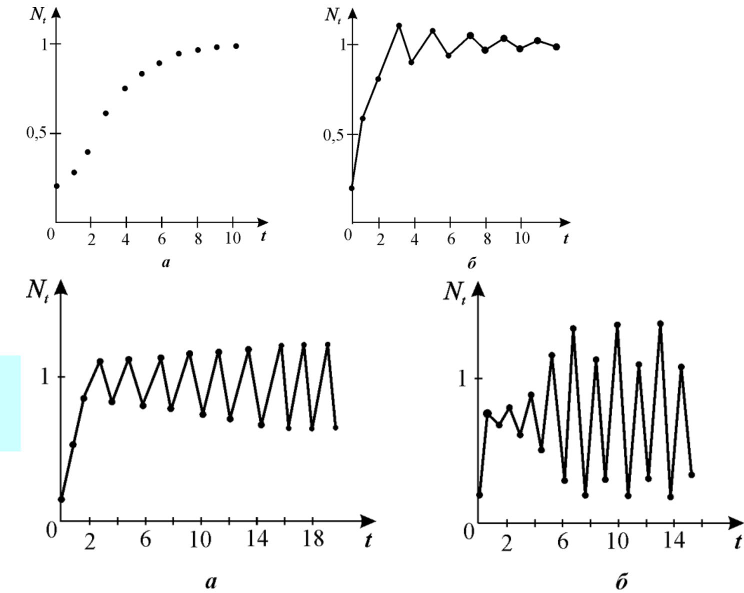
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

# Переход к хаосу через удвоение периода

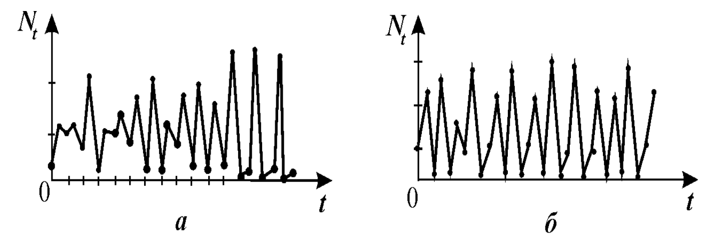


# Сценарий удвоения предельного цикла




$r_1$




$r_\infty$

Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \ln\|y^i(t)\|.$$

Ляпуновский показатель – это усредненное вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения $\rho i$ матрицы линеаризации. Устойчивость траектории по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение $y(t^*)$ в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ляпуновских показателей $\lambda i$ не содержал положительных показателей.

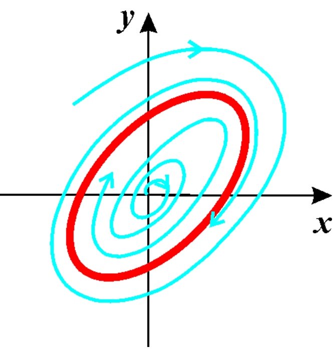
# Устойчивость и неустойчивость движения

## Устойчивость по Ляпунову

Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon)$, *что для всякого движения* $\boldsymbol{x}(t)$, *для которого* $||\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)|| < \delta$, *при всех* $t > t_0$ *выполняется неравенство:* $||\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)|| < \varepsilon$.

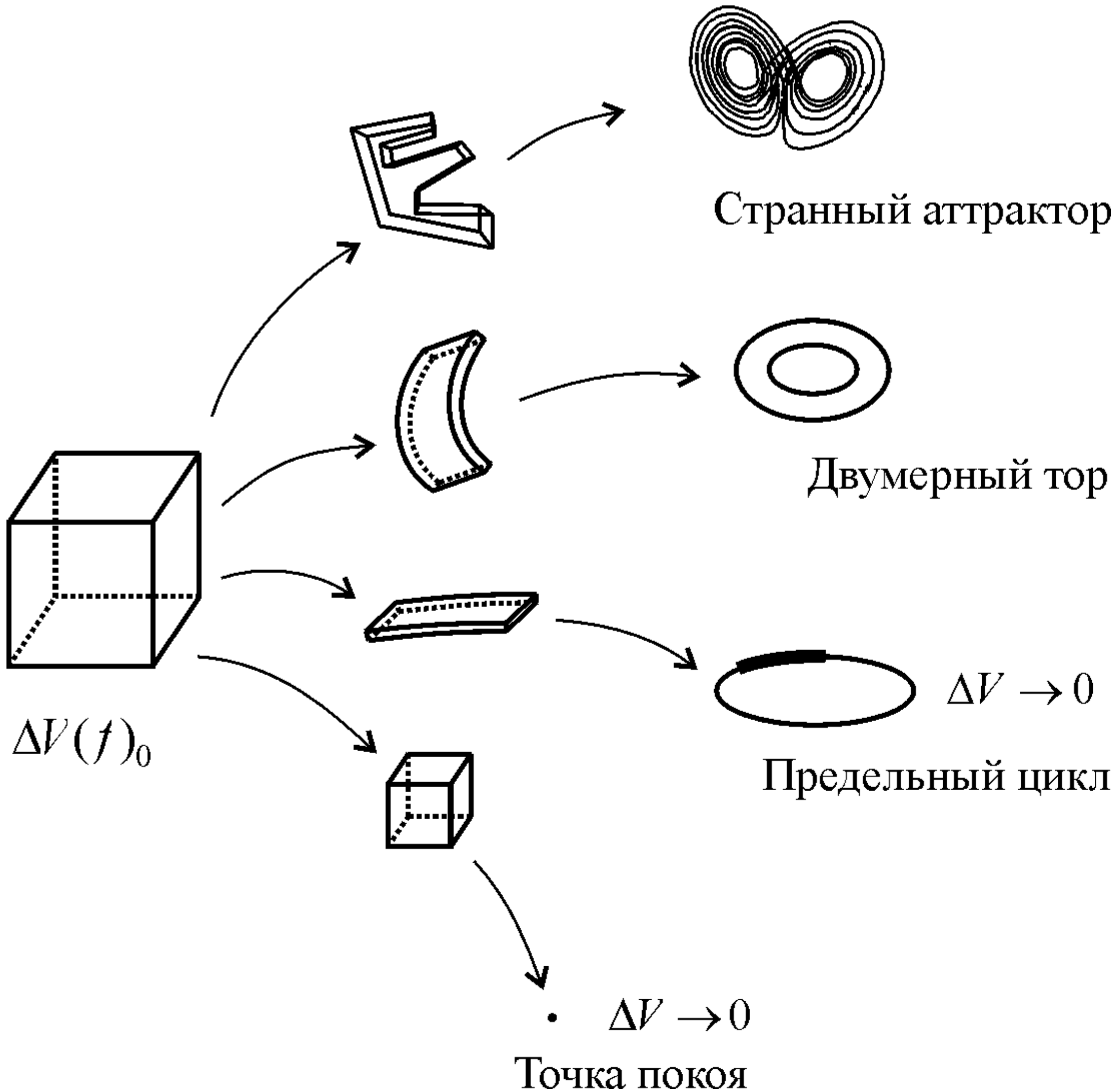
Знак $||\ ||$ означает норму (длину) вектора.

# Устойчивость по Пуассону



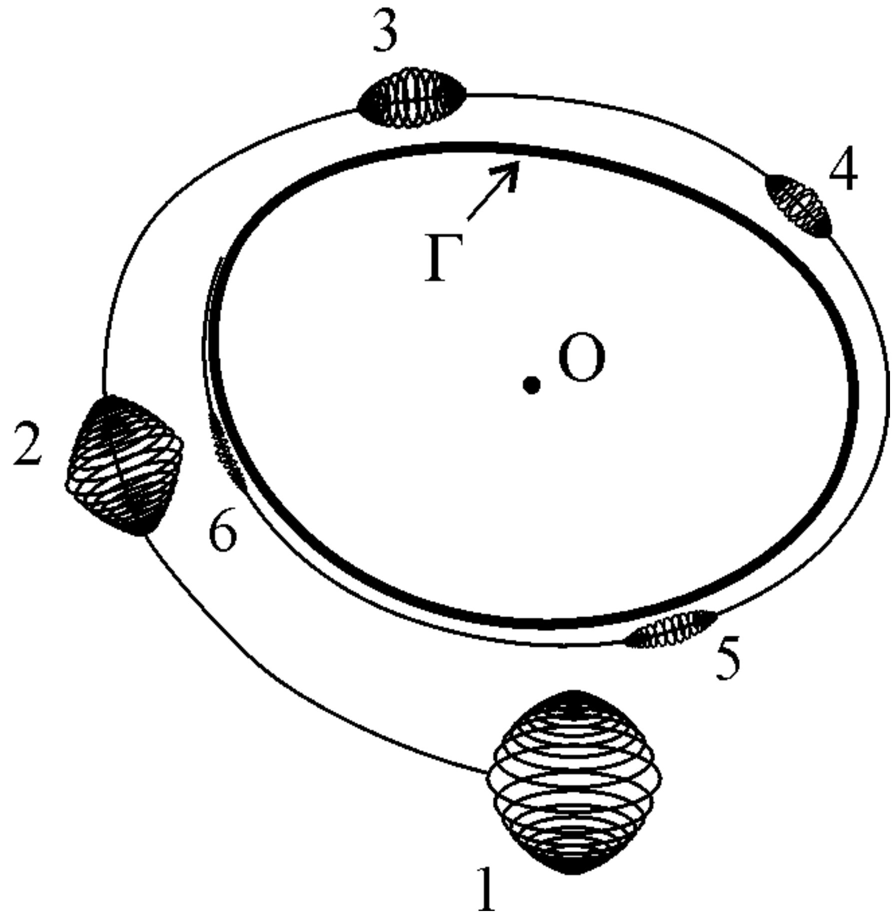

предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \to \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать ***периоду*** или ***квазипериоду*** при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.

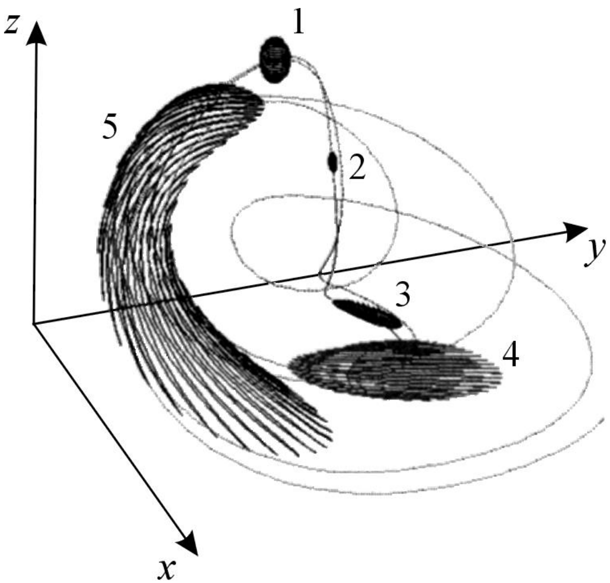
# Диссипативные системы

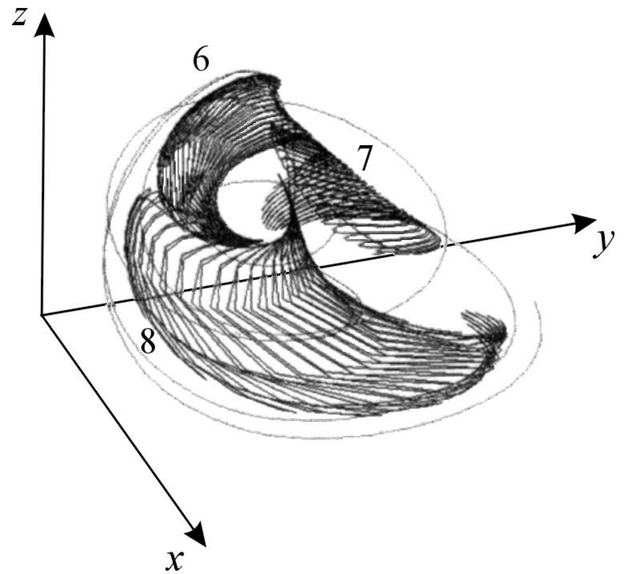



Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.

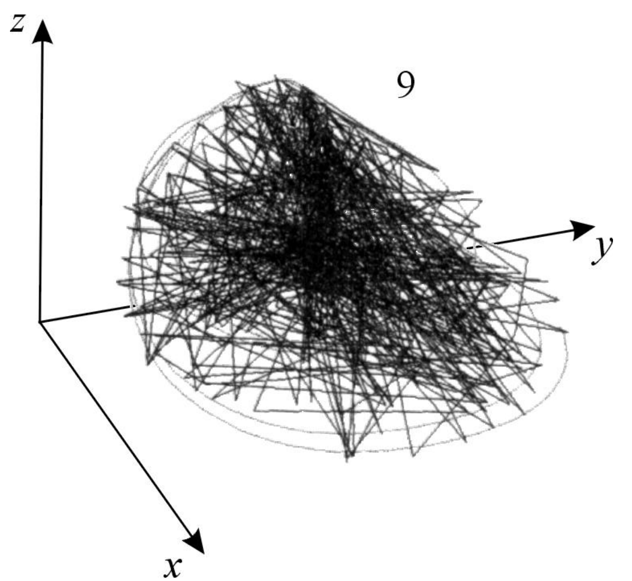
Сжатие элемента фазового пространства радиуса ε при «наматывании» траектории на устойчивый предельный цикл -траектория Г.






Эволюция малого первоначального фазового объема во времени в динамической системе (Анищенко и др., 1999).



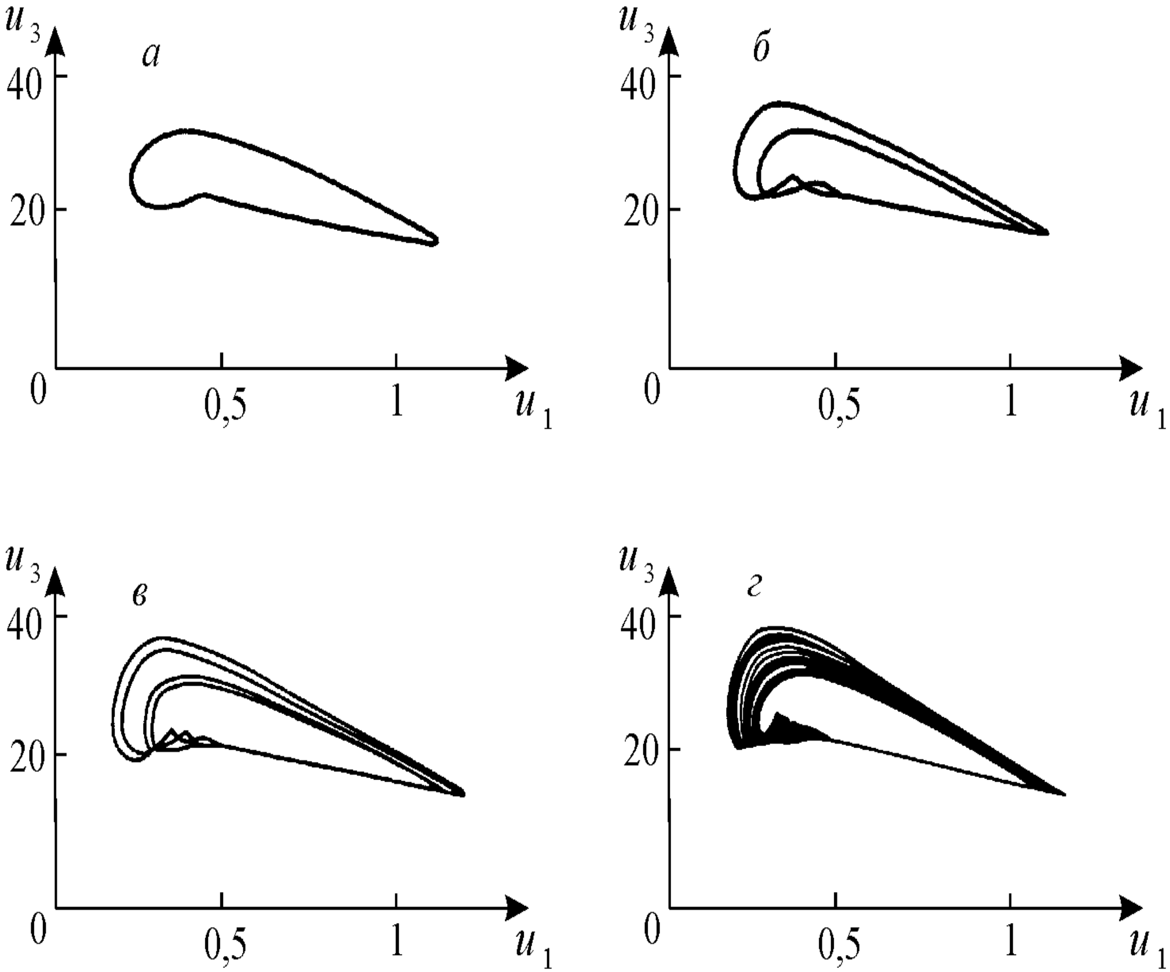

$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x \le 0. \end{cases}$$

# Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием
- Распределенные в пространстве системы




# Странный аттрактор в системе хищник – две жертвы

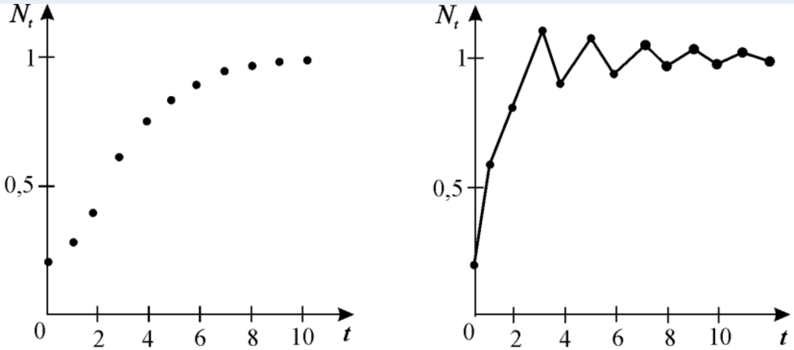
$$\frac{du_1}{dt} = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3),$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3),$$

$$\frac{du_3}{dt} = u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).$$

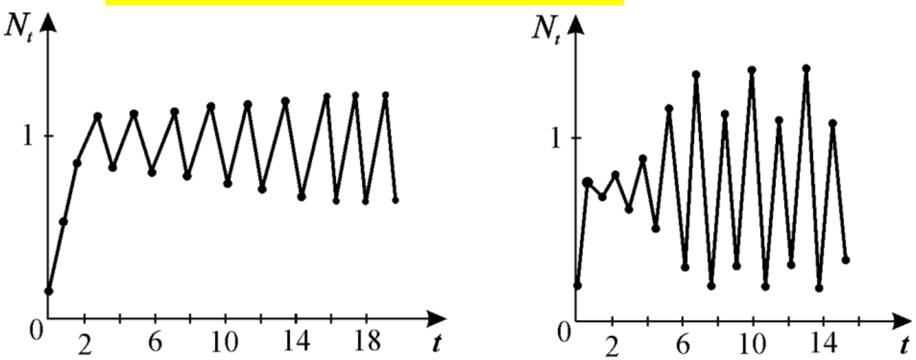
Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апонина, Ю.Апонин, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) $а - г$. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

# Переход к хаосу через удвоение периода



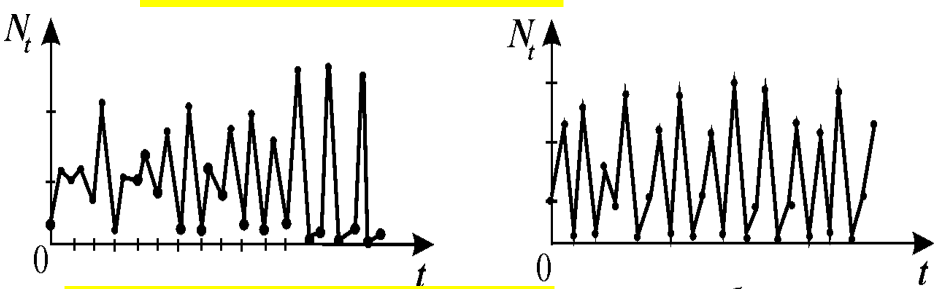

б

Устойчивое решение



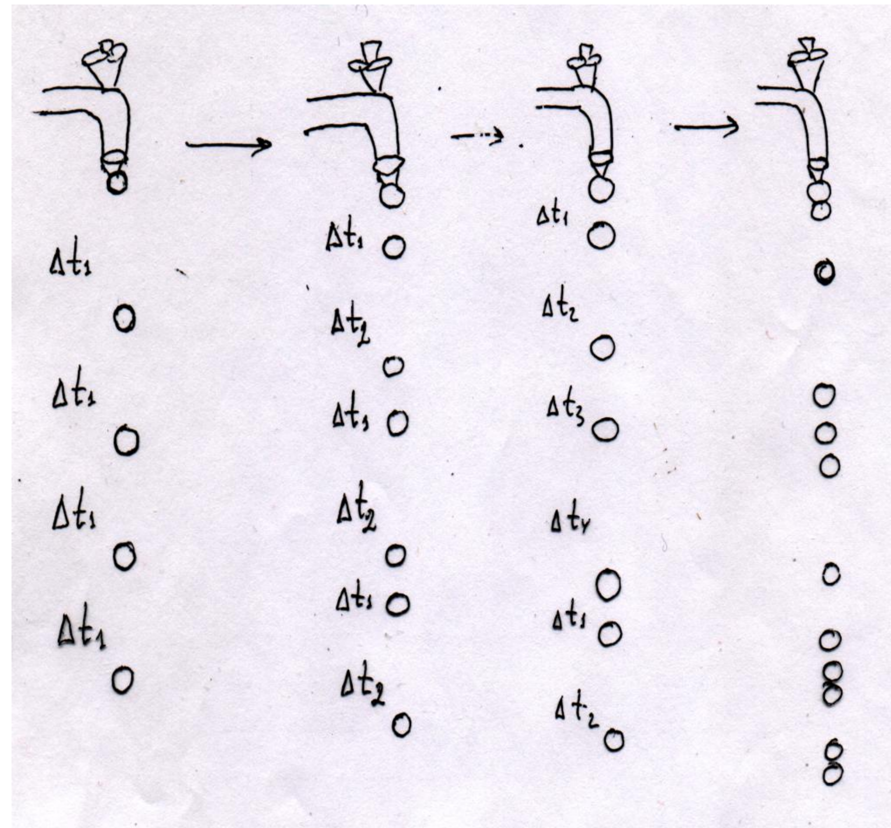

б

Циклы длины 2k




б

Динамический хаос




$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

# Модели замкнутых экосистем

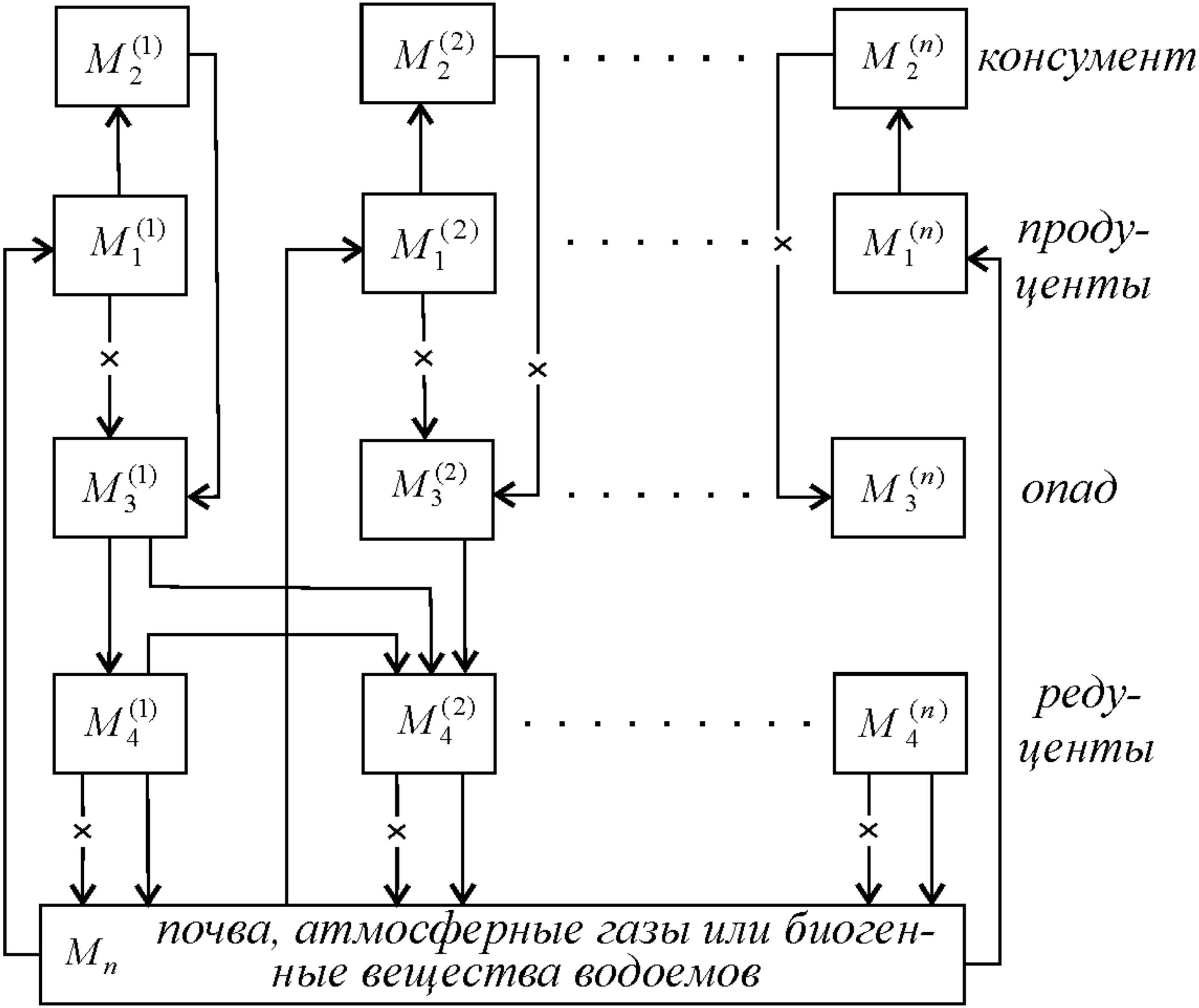
В.В.Алексеев, Крышев И.И., Сазыкина Т.Г.

Физическое и математическое моделирование экосистем

**Вячеслав Викторович Алексеев** (1940-2007)

Физик, эколог, геофизик. Динамика процессов в замкнутых экосистемах. Возобновляемые источники энергии

Схема потоков вещества по трофическим пирамидам в замкнутой экосистеме




$$\sum_{i,k} M_i^k + M_\Pi = M$$

# Система уравнений для трех трофических уровней

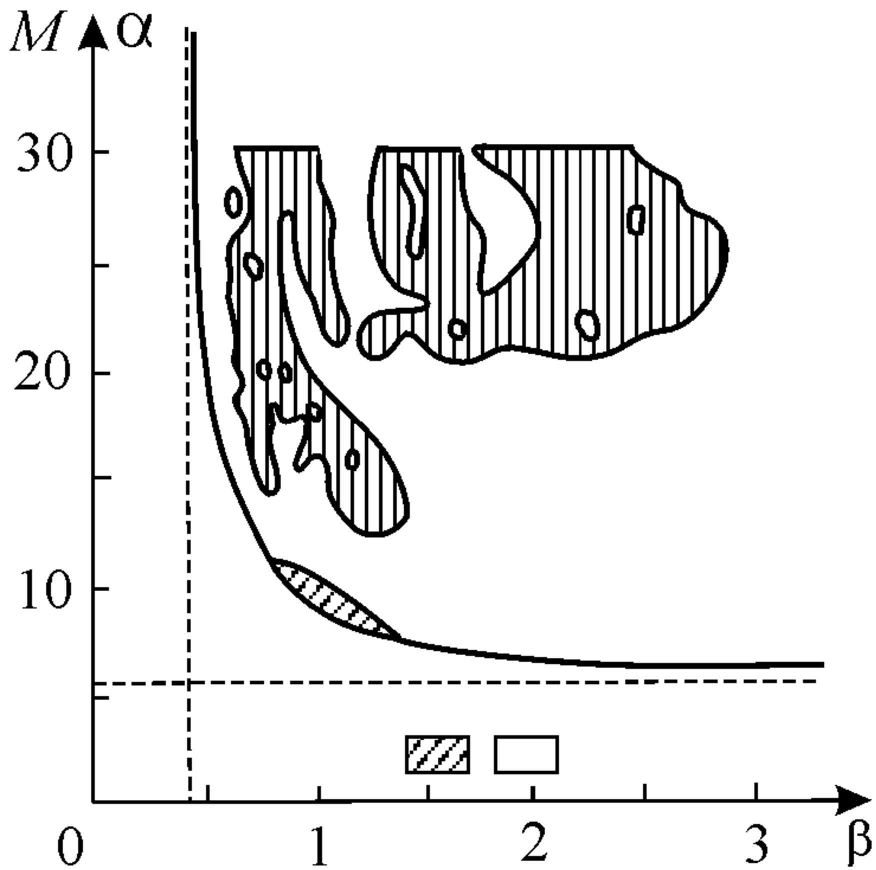
$$dM_1^{(i)}/dt = -\varepsilon_1^{(i)} M_1^{(i)} + \gamma_1^{(i)} M_1^{(i)} M_2,$$ растения

$$dM_2^{(i)}/dt = \varepsilon_1^{(i)} M_1^{(i)} M_2^{i} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_2^{(ik)} M_2^{(i)} M_3^{(k)},$$ травоядные

$$dM_3^{(i)}/dt = -\varepsilon_3^{(i)} M_3^{i} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_3^{(ik)} M_2^{(i)} M_3^{(i)},$$ хищники

$$dM_{\Pi}/dt = \sum_{i-1}^{n} \left[ \varepsilon_3^{(i)} M^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} \left( \gamma_2^{(ik)} - \gamma_3^{ik} \right) M_2^{(i)} M_3^{(k)} - \gamma_1^{i} M_1^{(i)} M_{\Pi} \right].$$

# Области стохастичности (штриховка) для системы два хищника – две жертвы




**Александр Юрьевич Лоскутов** (1960 – 2011)
Профессор физического факультета МГУ

В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. О возможности управления системы со странным аттрактором. Проблемы экологического мониторинга, 1985

$\bar{V}_{in}$

# Glycolysis with periodic substrate input flux

$$\frac{d[F6P]}{dt} = \frac{d[PEP]}{dt} + \frac{d[ATP]}{dt}$$

$$= \bar{V}_{in} + A \sin\omega_e t - V_{PFK}$$

$$\frac{d[ADP]}{dt} = -\frac{d[ATP]}{dt} = V_{PFK} - V_{PK}$$

F6P – fructose 6 phosphate

PEP – phosphoenolpyruvate

$\bar{V}_{in}$ - the mean input flux

$\omega_e$ - frequency of the periodic input flux

$A = \bar{V}_{in}$

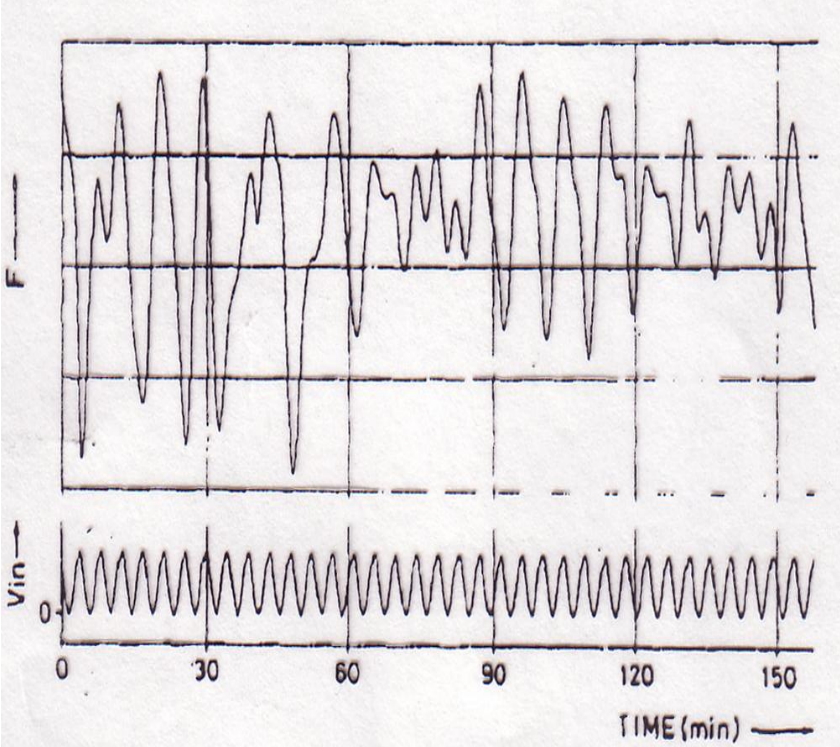
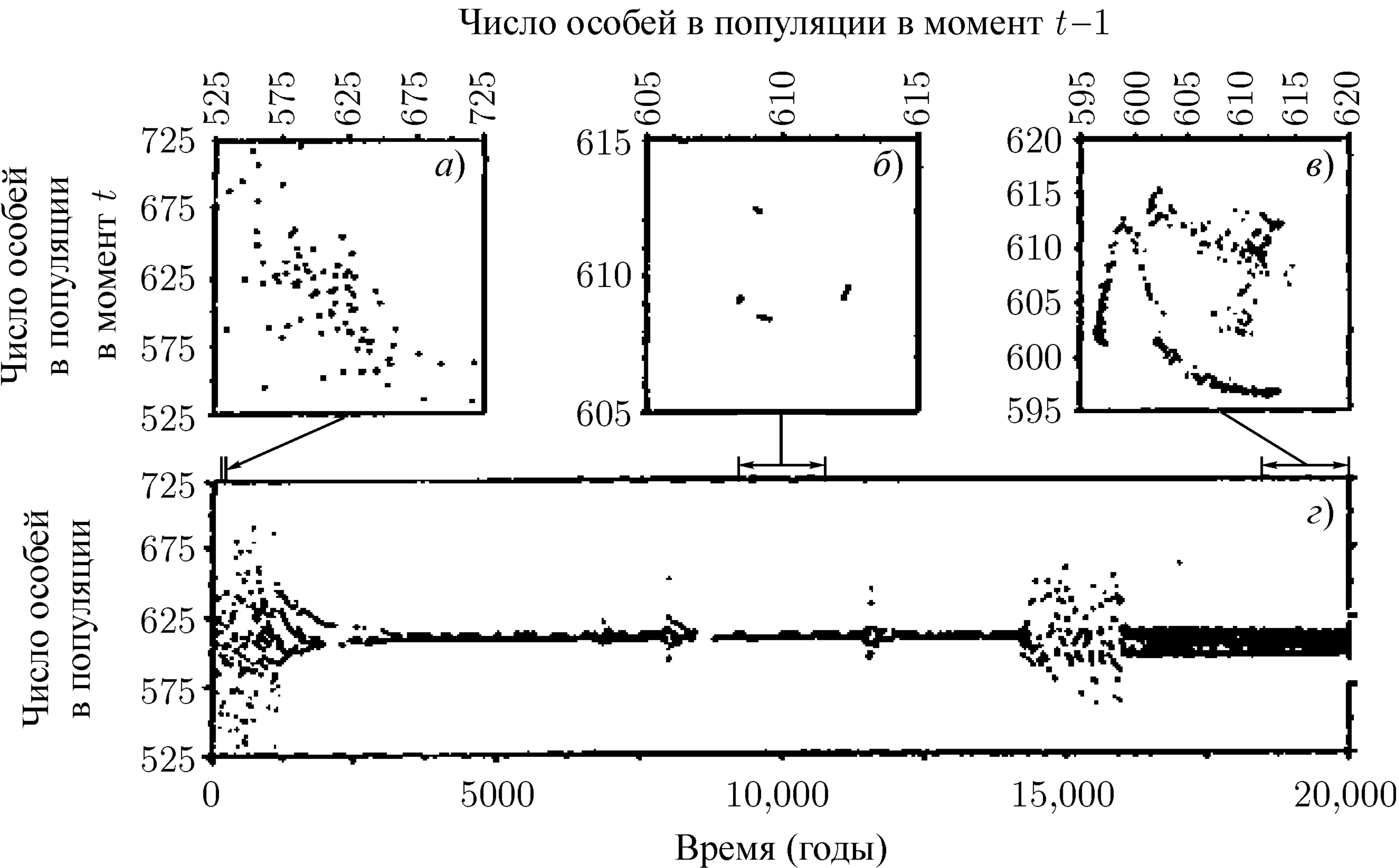



Fig. 2. Measured NADH fluorescence (upper curve) of yeast extract under sinusoidal glucose input flux (lower curve).

Модели популяционной динамики

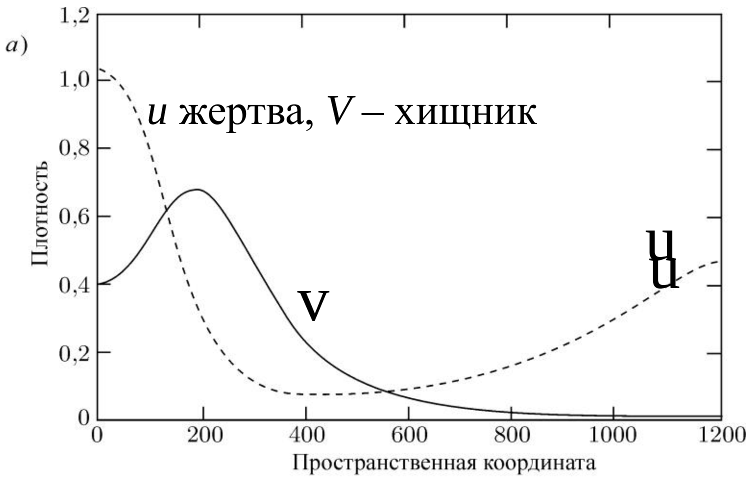
# В пространстве и времени

*A.Hastings, K.Higgins.* Persistence of transients in spatially structured ecological models Science, 1994, 263, 1133-1136.



**Ма́лхов Хорст** (Malchow Horst) – немецкий ученый, профессор, университета Оснабрюкке. Декан факультета сложных систем

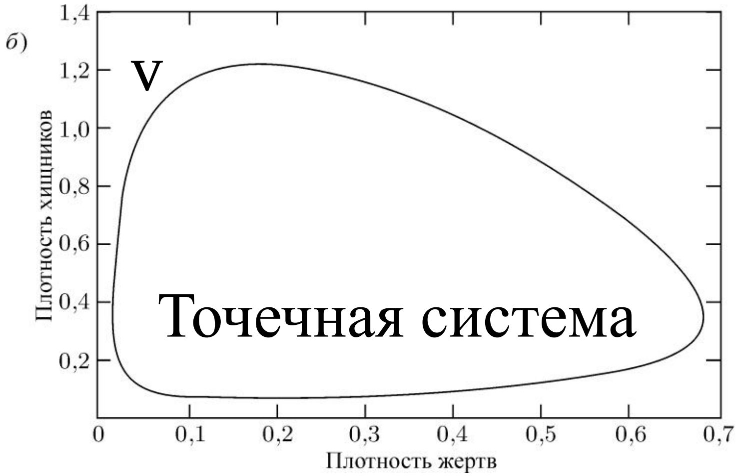
# Колебания и пространственный хаос




Подвижности видов (коэффициенты диффузии) одинаковы (не Тьюринг)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) - \frac{u}{u+H}v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{u}{u+H}v - mv,$$

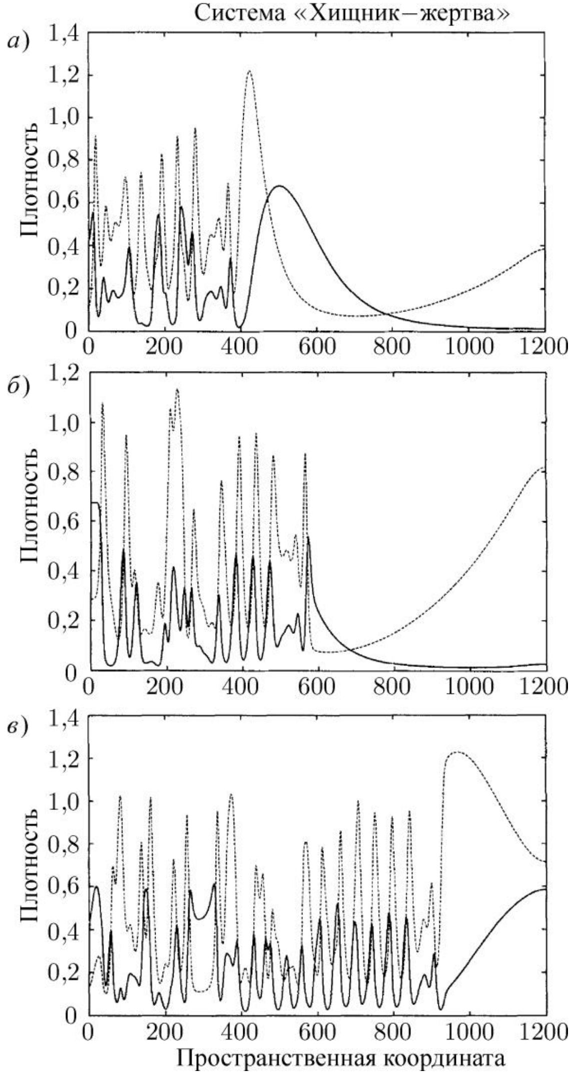



*Зададим малые возмущения*

u

Malchow H., Petrovskii S.V., Venturino E. Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: Theory, models, simulations. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2008

# Малые возмущения динамической системы в пространстве дают динамический хаос




$$u(x,t) = u_3,$$

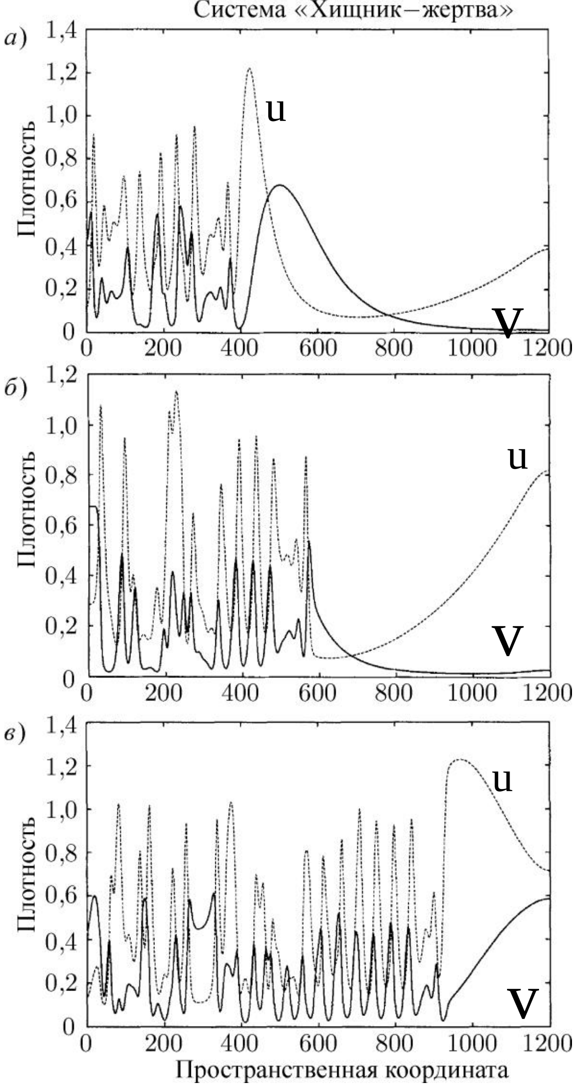
$$v(x,0) = v_3 + \left[\varepsilon(x - x_0) + \delta\right].$$

$\delta = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}0004$, $x_0 = 0$

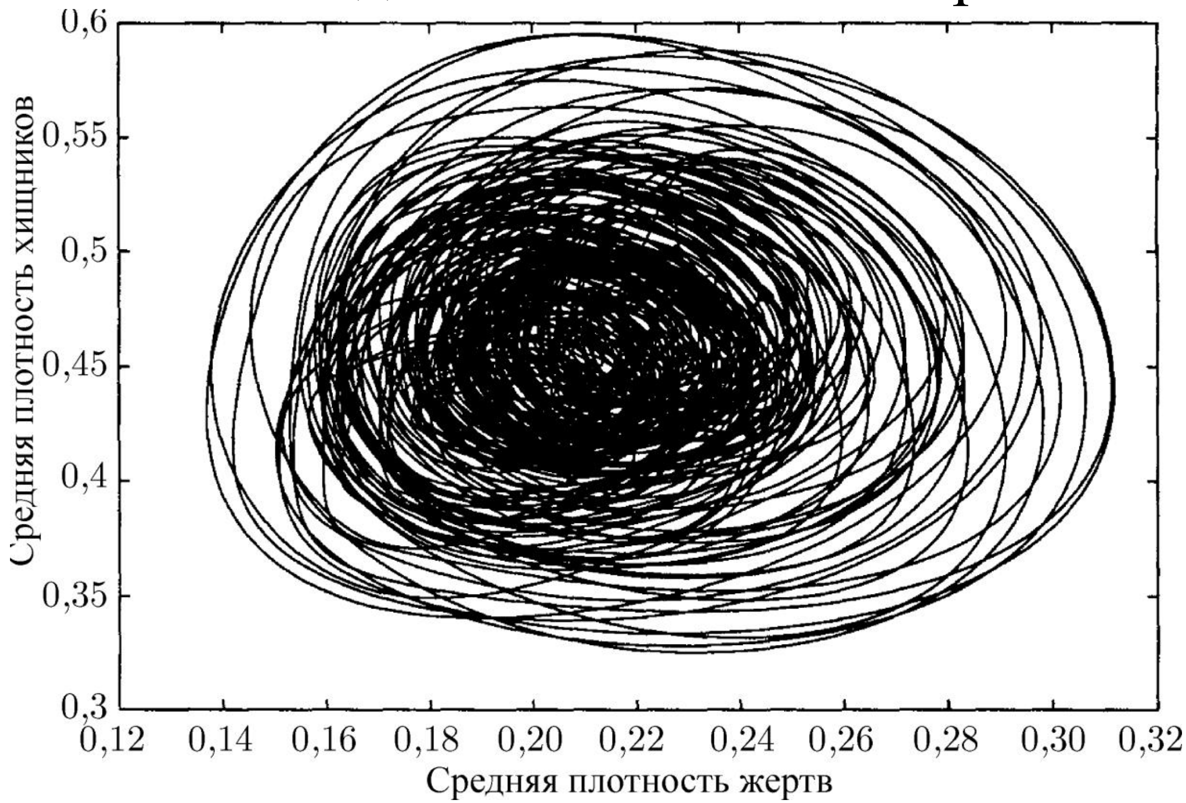
*а* – *t* =500, б – *t* =1000, в – *t* = 2000

Petrovskii S.V. and Malchow H. A minimal model of pattern formation in prey-predator system. *Math. Comput. Modelling* **29**: 49-63, 1999

# Пространственный хаос




Фазовый портрет в точке x=480 после того, Как хаотическое поведение охватило весь ареал



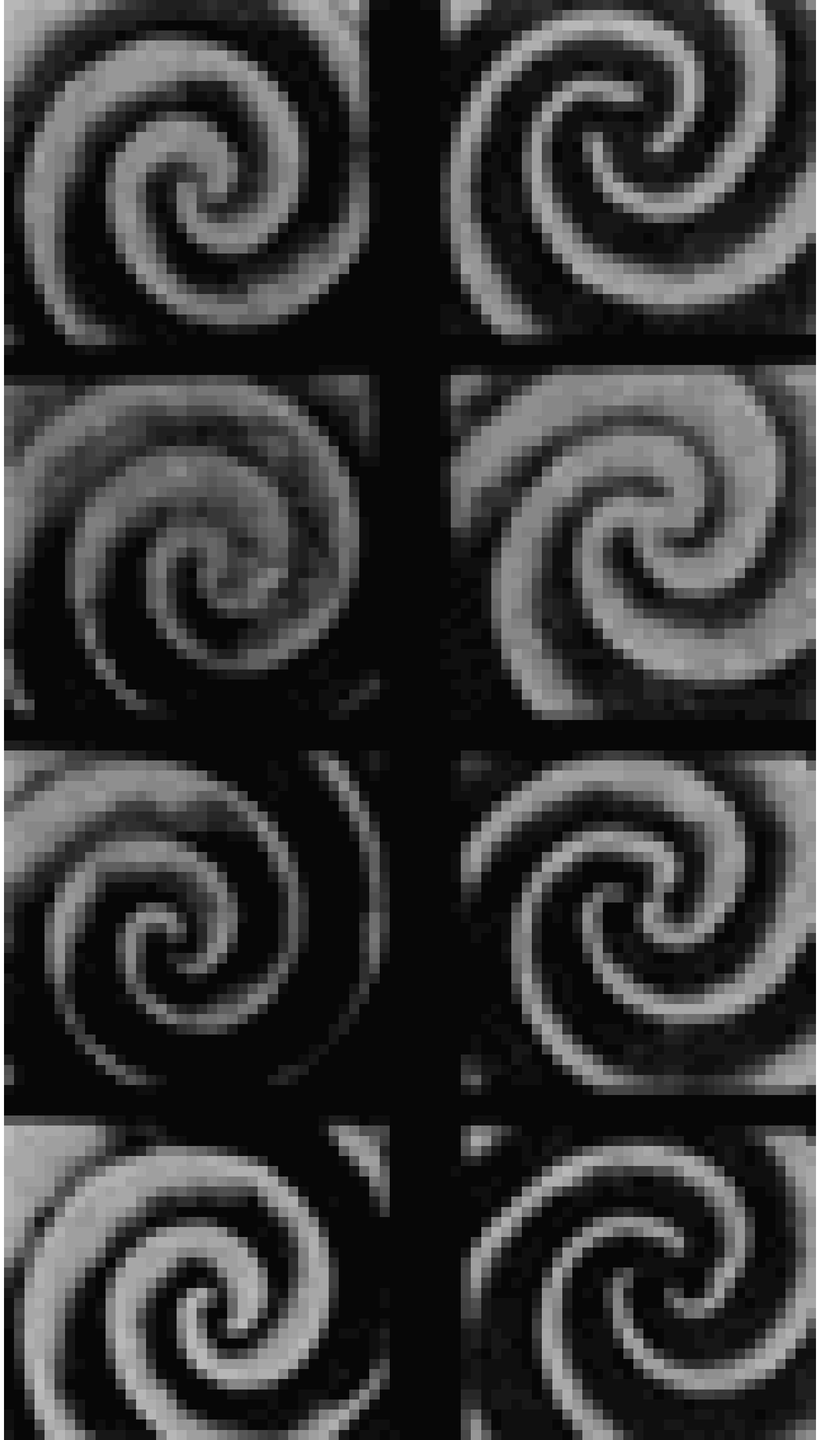

*а* – *t* =500, б – *t* =1000,
в – *t* = 2000

В распределенной системе процессы переноса приводят к хаотизации поведения всей системы

# Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов,
А.С.Михайлов.
Основы теории сложных систем

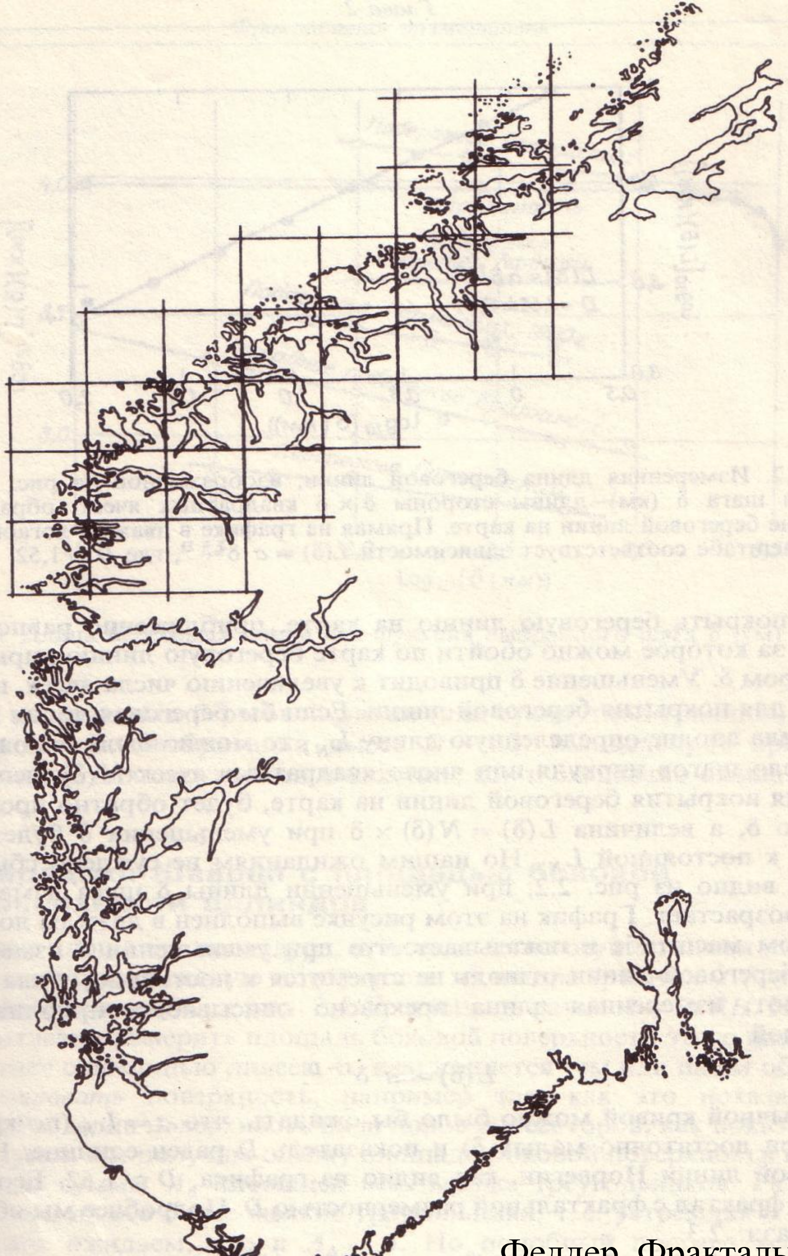
ИКИ-РХД, 2007



# Фракталы – самоподобные множества

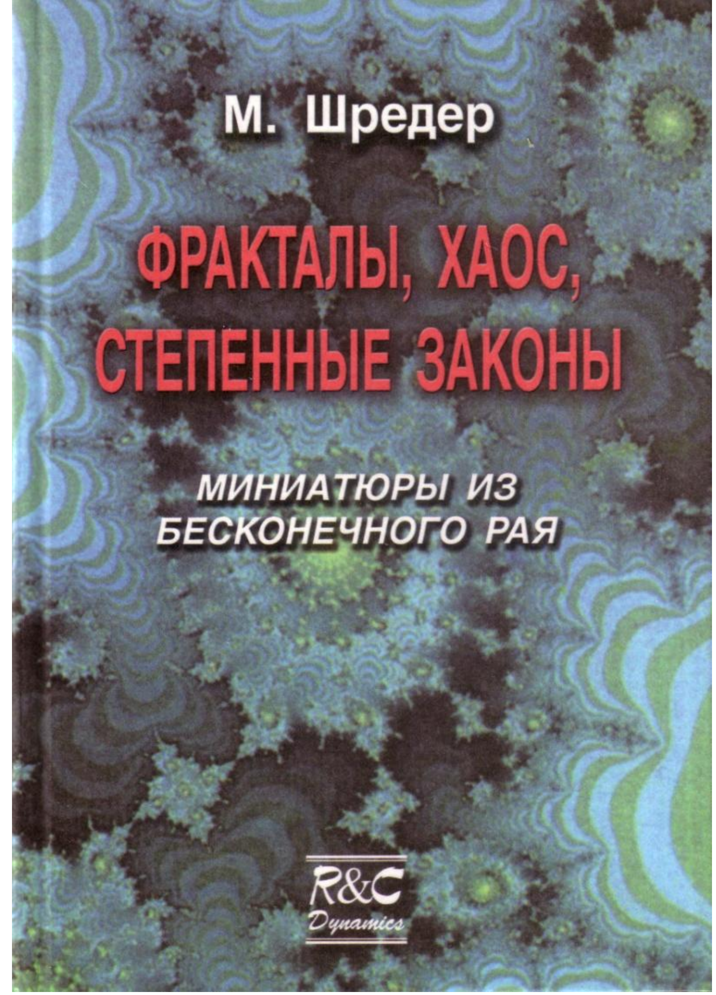
*Benoît Mandelbrot*
1924-2009

Бенуа Мальдельброт. 1924-2010. Французский и американский математик. Придумал понятие «фрактал» - “Fractus” (лат) – сломанный, разбитый.



Феддер. Фракталы

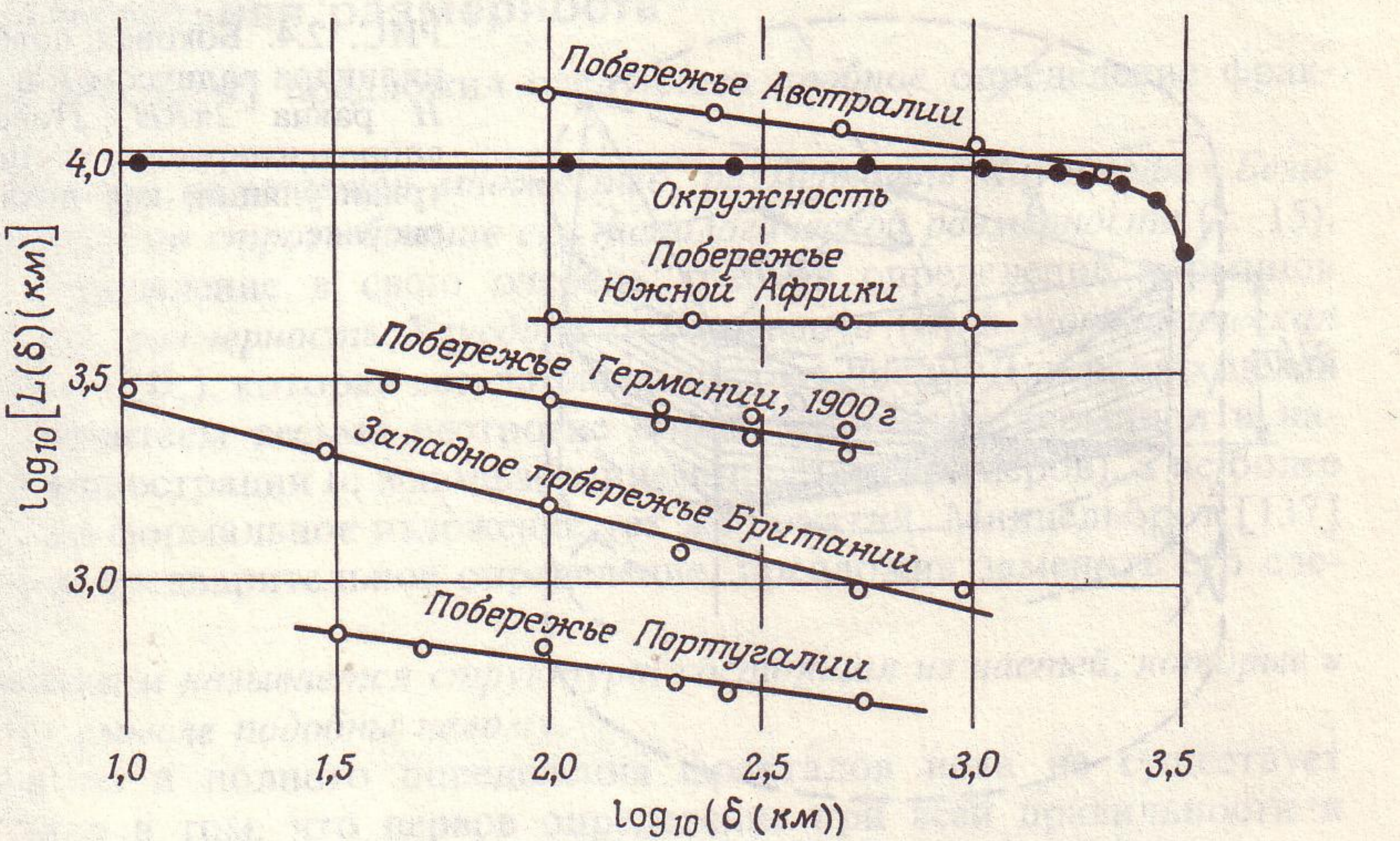
**РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью растра, состоящего примерно из 1800 × 1200 ячеек. Изображенная вверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.**



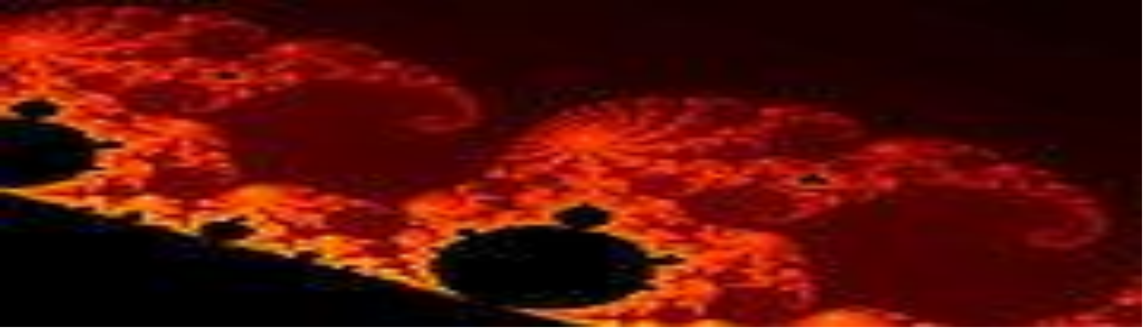

Б.Мандельброт. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Изд. РХД 2009

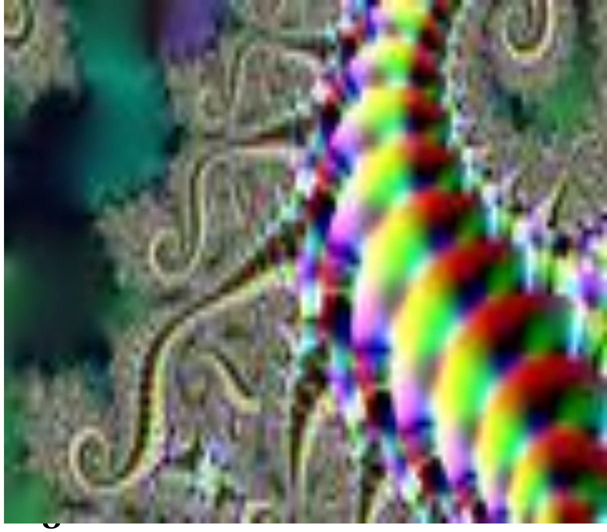
The Mandelbrot set and beyond. Springer

# Длина береговых линий




С. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага δ (км) [134].





# Определение Фрактала

- Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.
- Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.

- Фракталы – множества точек, вложенные
  в пространство

- Топологическая размерность линии – 1,

поверхности – 2,

шара – 3

# Фракталы. Размерность

**Хаусдо́рф Феликс** (Hausdorff Felix, 1868-1942) –немецкий математик один из основоположников современной топологии.

Писатель.
Псевдоним Поль Монгре

Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

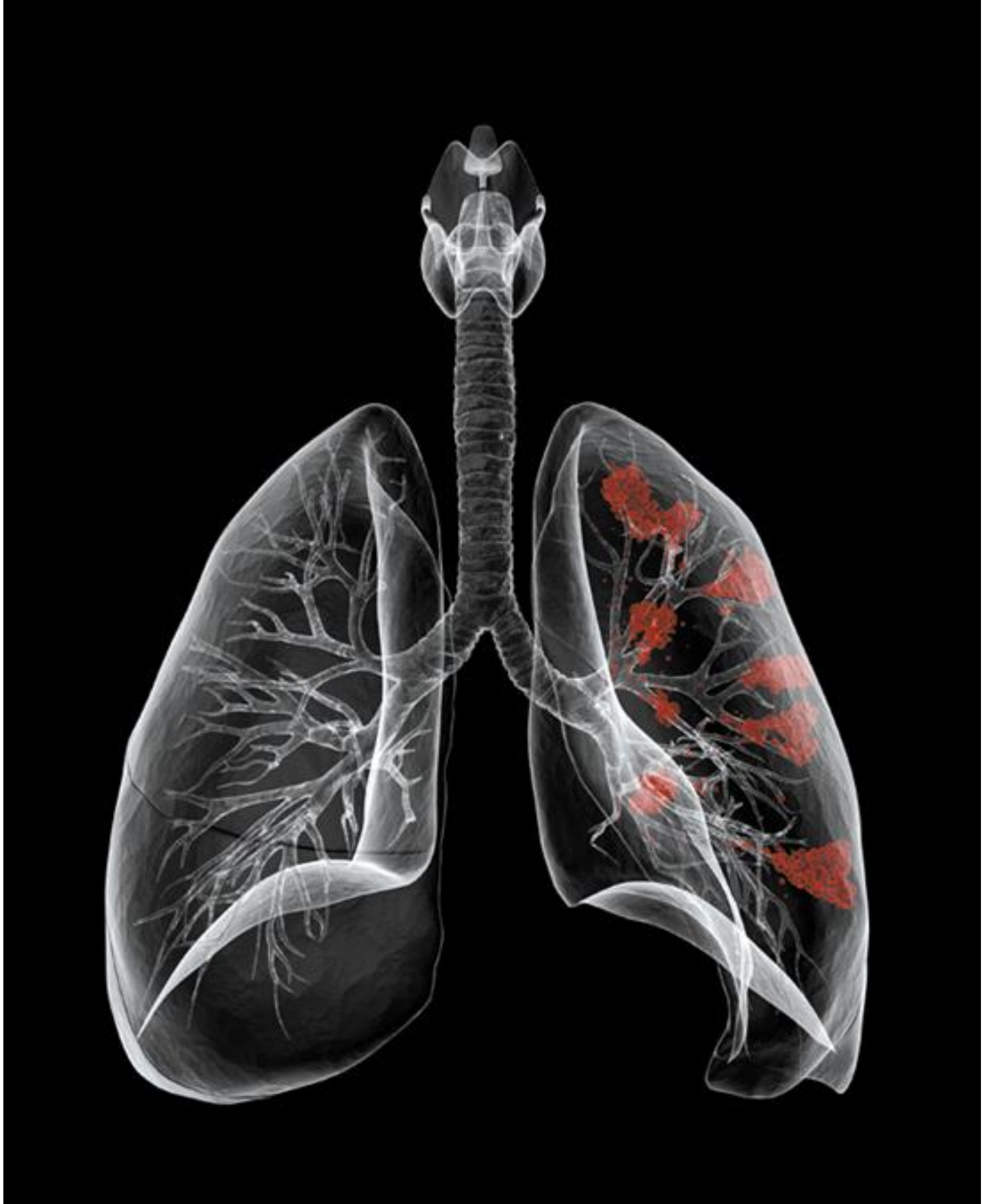
$$\delta \to 0 \qquad N(\delta) \sim 1/\delta^{D}$$

Для обычной кривой множитель *a* равен количеству отрезков: *a*=$L_N$, а показатель D равен единице. Но для береговой линии Норвегии D ~ 1,52. Показатель D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.

# Альвеолы человеческого легкого

Оптическая микроскопия – 80 кв. м

Электронная микроскопия – 140 кв. м
D=2,17

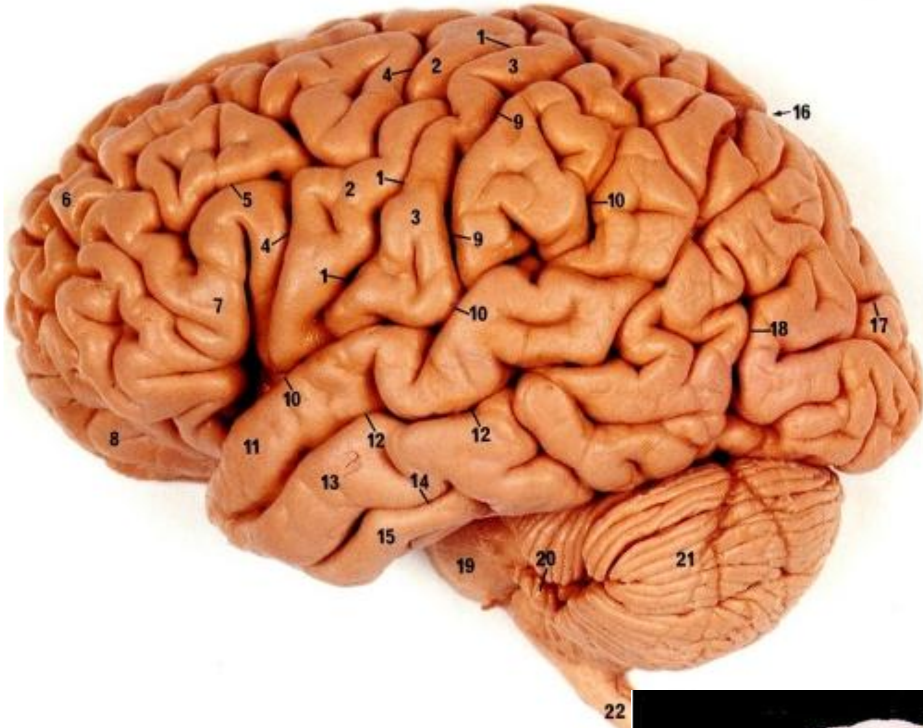


# Мембраны

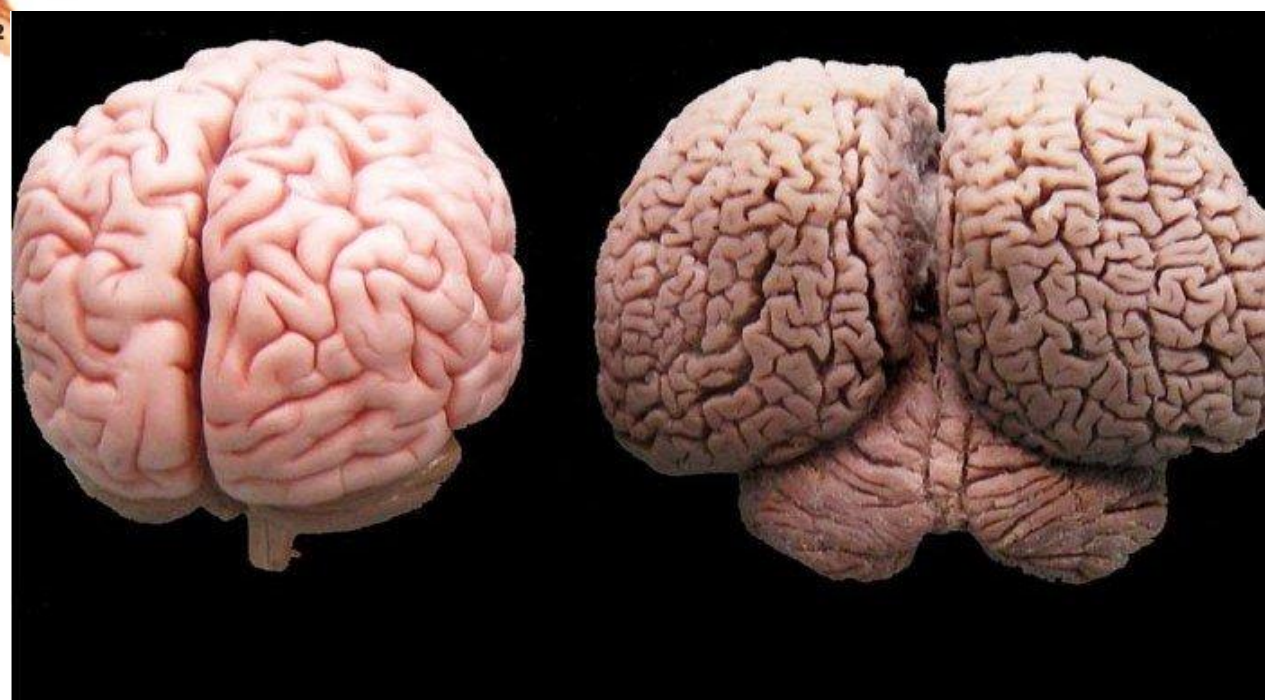
Субклеточные мембраны в клетках печени

Внешние митохондриальные мембраны D=2,09

Внутренние митохондриальные мембраны D=2,53




# Поверхность человеческого мозга



Мозг человека и дельфина

# Кривая Коха.

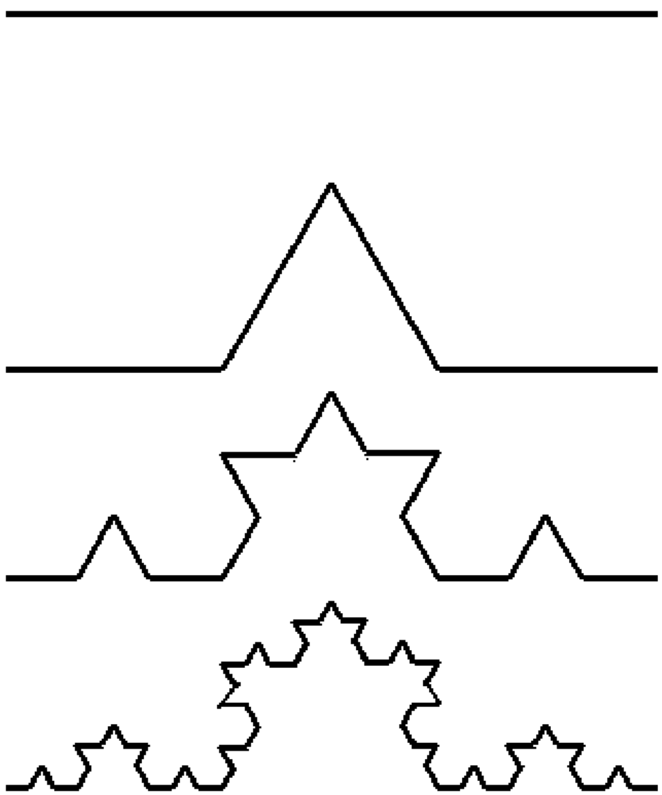
# Первые четыре шага построения.

n=0

n=1

n=2

n=3



**фон Кох Нильс Фа́биан Хе́льге (1870-1924),** шведский математик, автор основополагающих работ по теории чисел

Длина кривой 1-го поколения L(1/3) =4/3.
4 звена, длина каждого – 1/3

Длина кривой 2-го поколения.

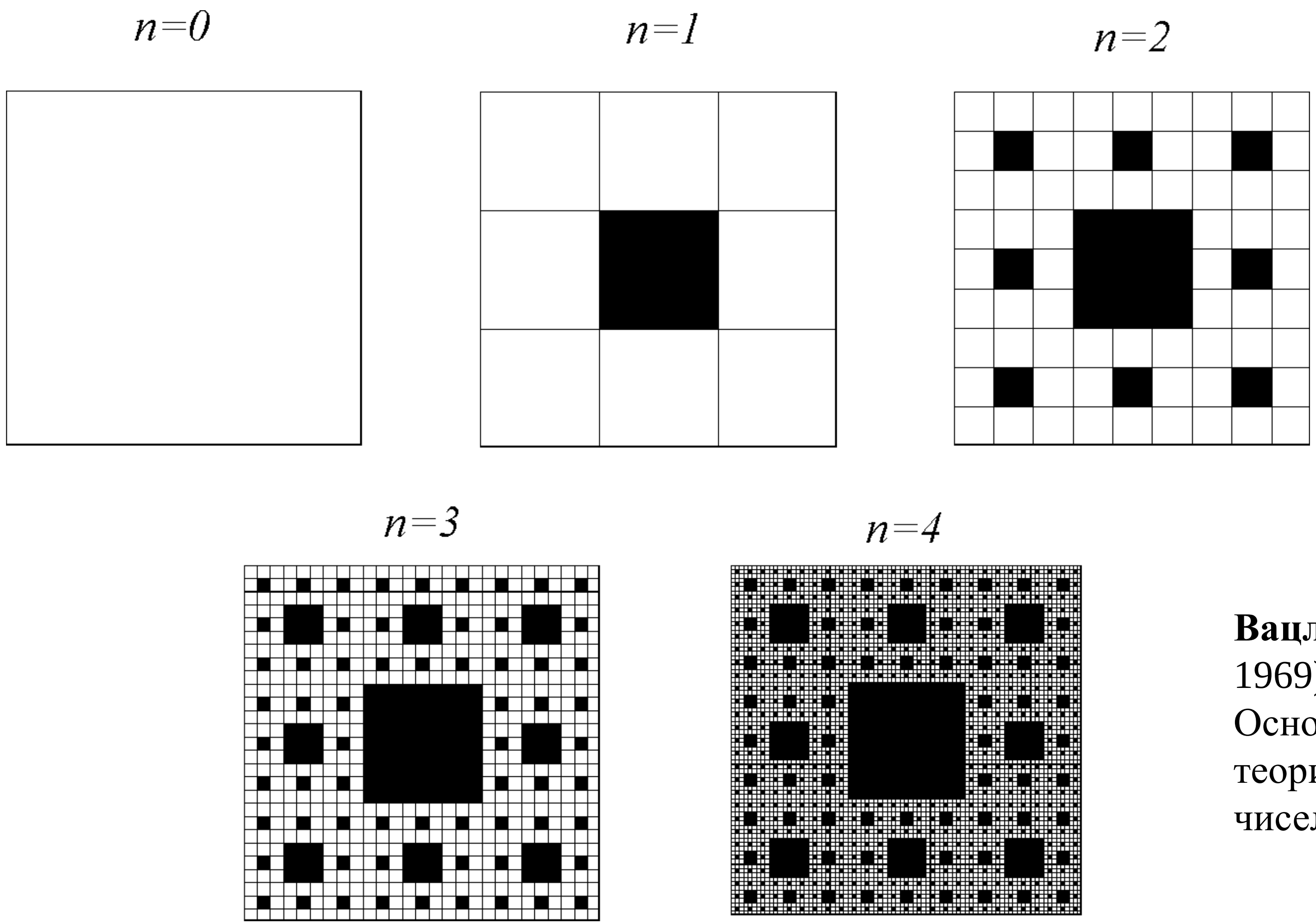
Число звеньев: $N=4^2=16$, длина каждого – 1/9

Длина каждого звена: $\delta=3^{-n}$

$n=-\ln\delta/\ln 3$

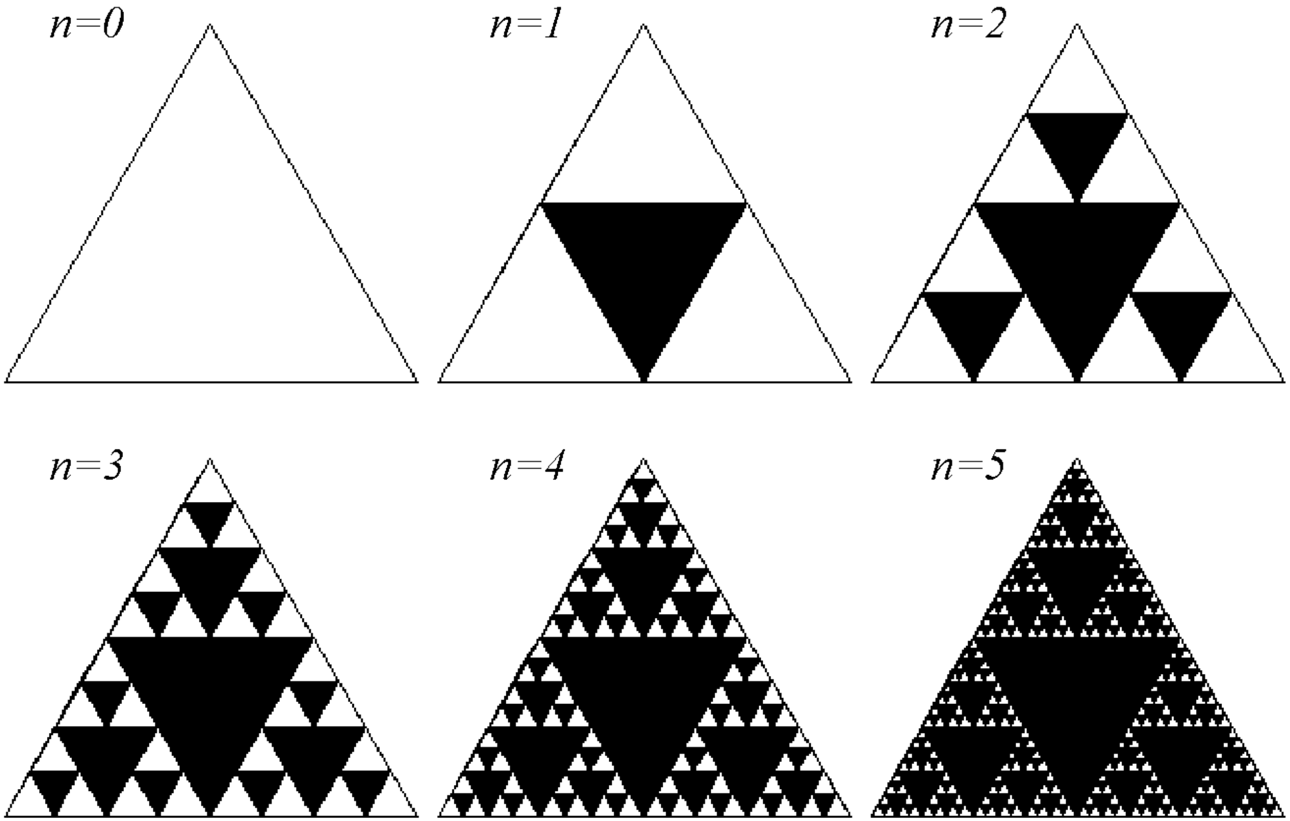
$L(\delta)=(4/3)^n=\delta^{1-D}$ $\quad D=\ln 4/\ln 3 \sim 1{,}2628$

Построение ковра Серпинского. Начальный элемент – белый квадрат со стороной, равной 1. Из него вырезается черный квадрат, со стороной, равной 1/3. Далее из каждого белого квадрата вырезается снова черный квадрат, со стороной, равной 1/3 стороны белого квадрата. На рисунке показаны четыре поколения предфракталов. Размерность подобия D=ln8/ln3=1,89…

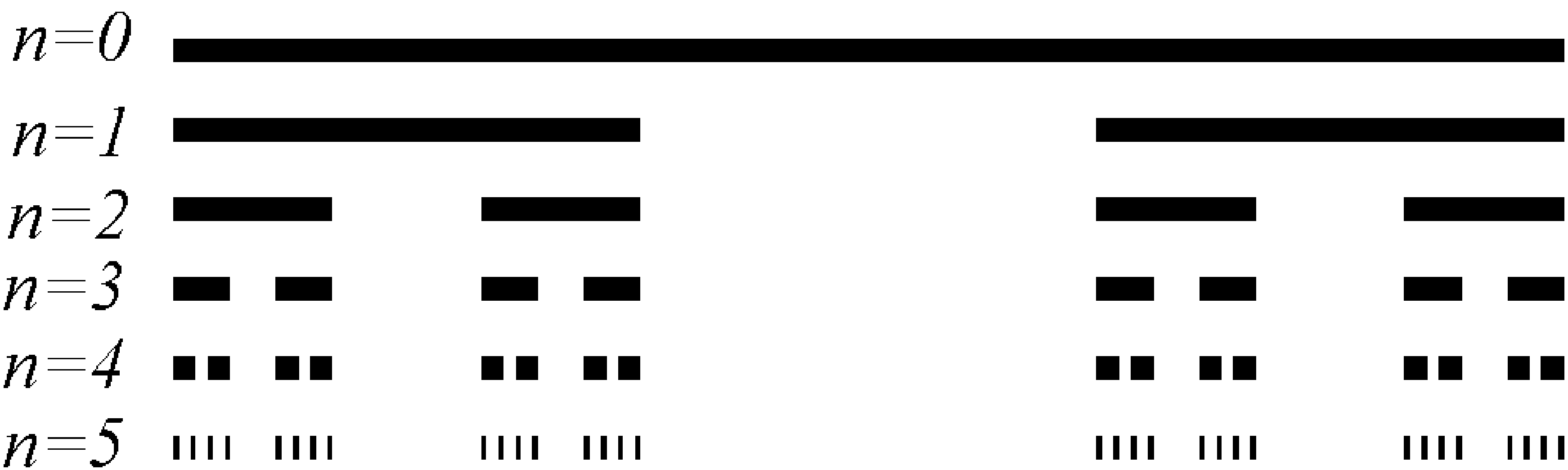



**Вацлав Серпинский** (1882-1969) –польский математик. Основные труды посвящены теории множеств. Теории чисел, топологии

Построение треугольной салфетки Серпинского. Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из него центральный треугольник. На рисунке показаны пять поколений предфракталов. Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность D=ln3/ln2=1,58…



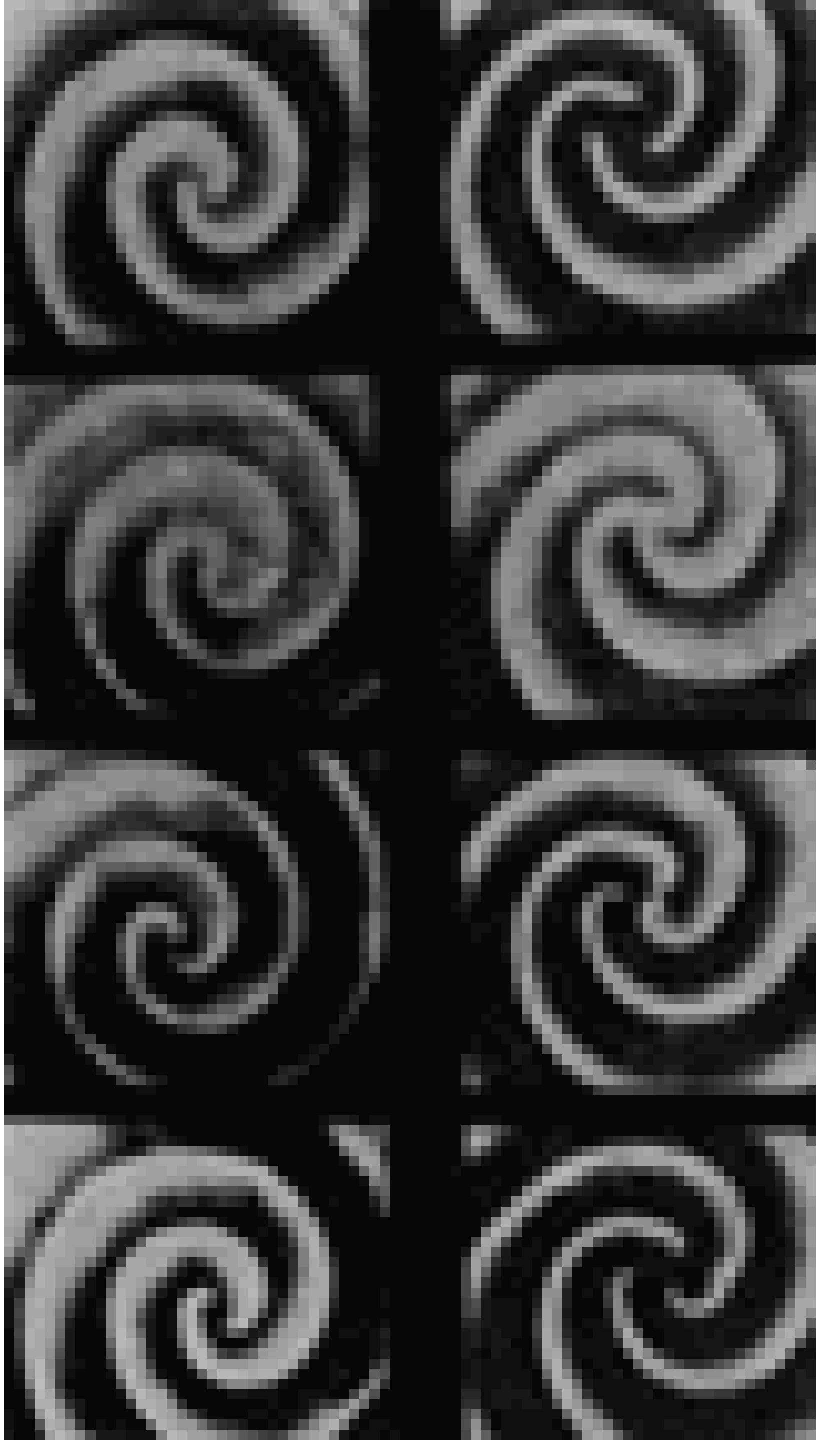
Канторово множество названо в честь великого математика Георга Кантора (1845-1918), открывшего его в 1883 г. Построение кривой Коха можно рассматривать как процесс добавления к отрезку все более мелких деталей. Построение канторова множества сводится к выбрасыванию из первоначального отрезка все более мелких отрезков



# Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов,
А.С.Михайлов.
Основы теории
сложных систем

ИКИ-РХД, 2007



# Вопросы

- В чем смысл существования таких систем?

- Приведите примеры детерминированных систем с квазистохастическим поведением в своей области знания