

Модели нелинейного мира

www.biophys.msu.ru

Лекция 7

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского
государственного университета им.
М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(095)9390289; факс: (095)9391115;

E-mail: riznich@biophys.msu.ru



mathbio.ru

Триггеры

Мультистационарные
системы

Модели отбора

Геохронологическая таблица

1000 млн. лет	КАЙНОЗОЙ	Эволюция человека
	МЕЗОЗОЙ	Появление млекопитающих
	ПАЛЕОЗОЙ	Первые многоклеточные
2000 – 3000 млн. лет	ПРОТЕОЗОЙ	Биологическая эволюция
4000 млн. лет	АРХЕЙ	Микроископаемые
5000 млн. лет		Образование Земли
10 000 млн. лет 13,7 млрд лет- Большой взрыв		Возникновение солнечной системы

Типы эволюции

Новые элементы не появляются, а старые не исчезают – происходит их перераспределение в пространстве и во времени.

Эволюция галактик, упорядоченных вихрей в гидродинамике, автоколебаний и автоволн в активных средах.

Образование негомогенных стационарных распределений вещества в пространстве – диссипативных структур.

Самопроизвольный отбор немногих элементов (и их размножение) из очень большого числа различных уже существующих или тех, которые могут возникнуть.

Образование изотопов химических элементов, макромолекул в химической эволюции, видов в биологической эволюции, образование человеческих языков.

Все эти процессы идут в результате размножения и конкурентного отбора.

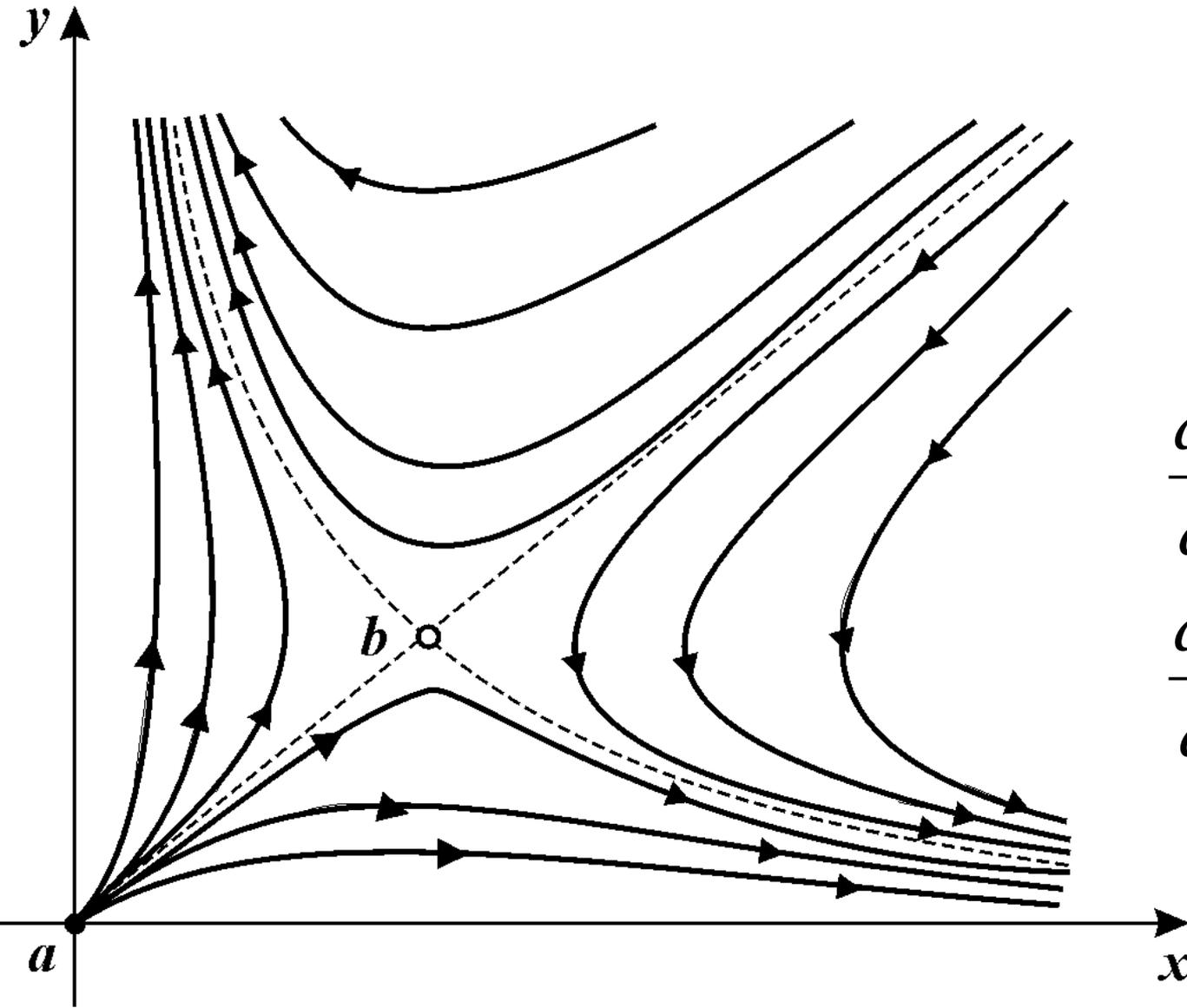
Возникновение единого генетического кода

Как происходит отбор?

- *Кастлер*: начальный код возник *случайно*, другие комбинации не успели возникнуть.
- *Эйген*: возникло несколько разных кодов, но *отобрались наилучшие*.
- *Д.С. Чернавский*: произошел отбор одного из равноправных.

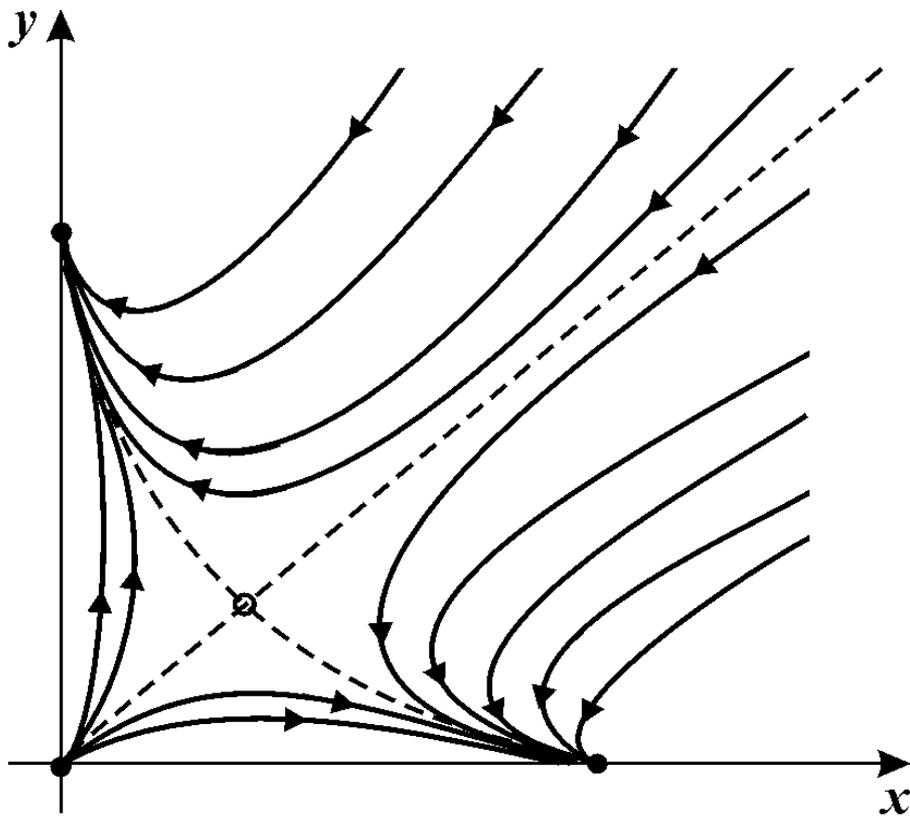


Конкуренция двух равноправных



$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$
$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$

Фазовый портрет триггерной системы,
описывающей конкуренцию
между двумя одинаковыми видами с ограниченной
численностью

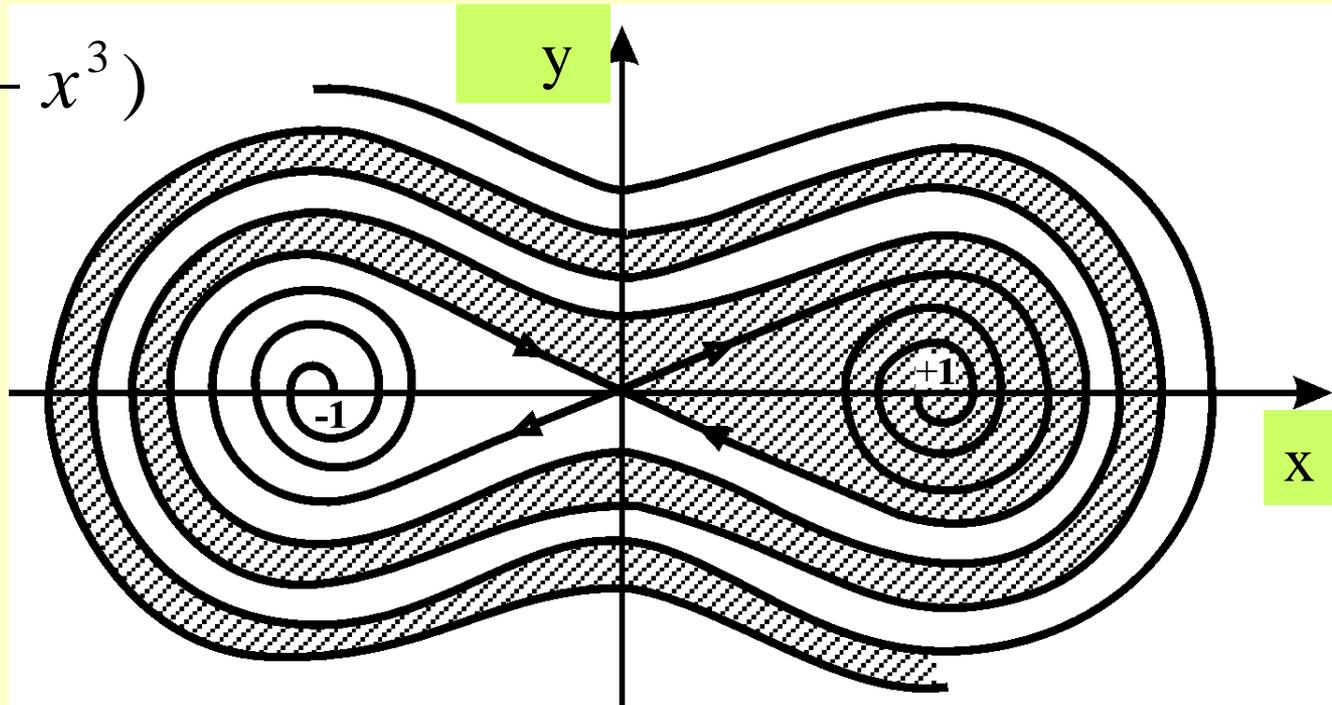


$$\frac{dx}{dt} = x - xy - ax^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = y - xy - ay^2.$$

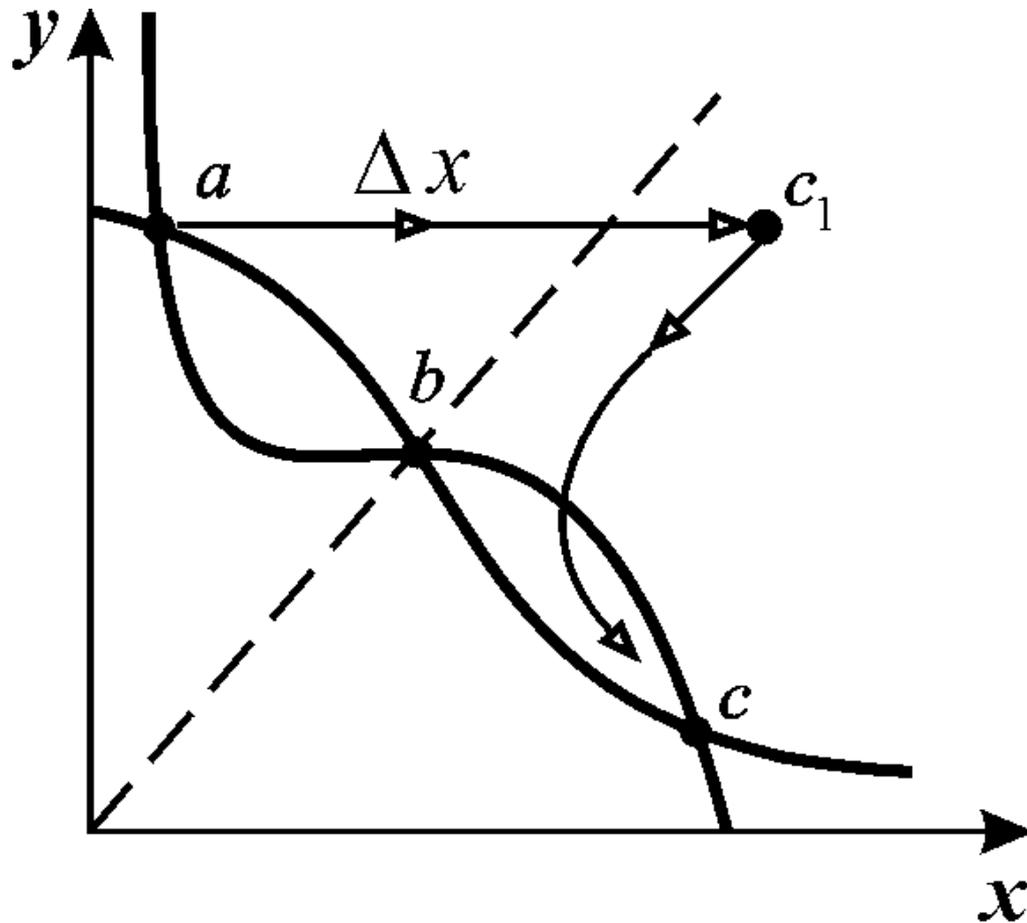
Фазовый портрет «слоистой» системы: “шарик в ложбине с двумя лунками”. Темным обозначена область притяжения стационарного состояния (+1) (Д.С.Чернавский)

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b(x - x^3)$$



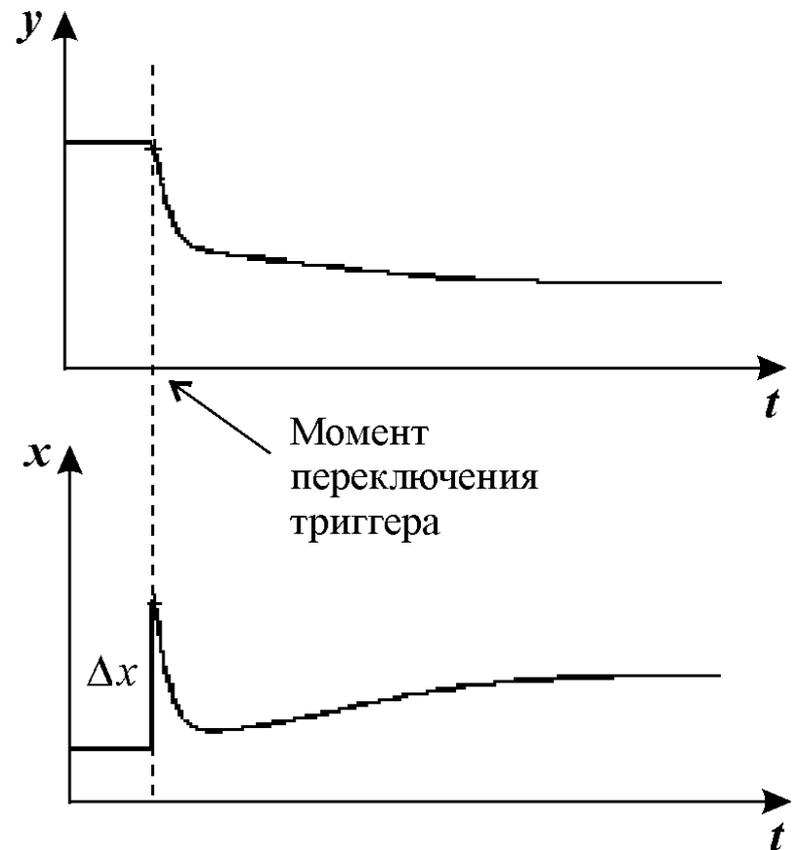
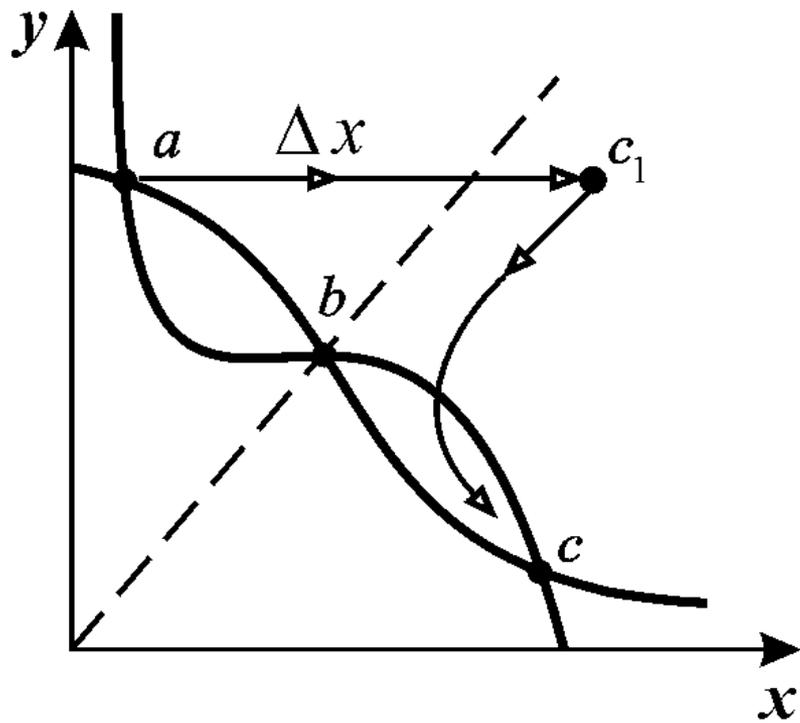
Фазовый портрет «стандартной» триггерной системы



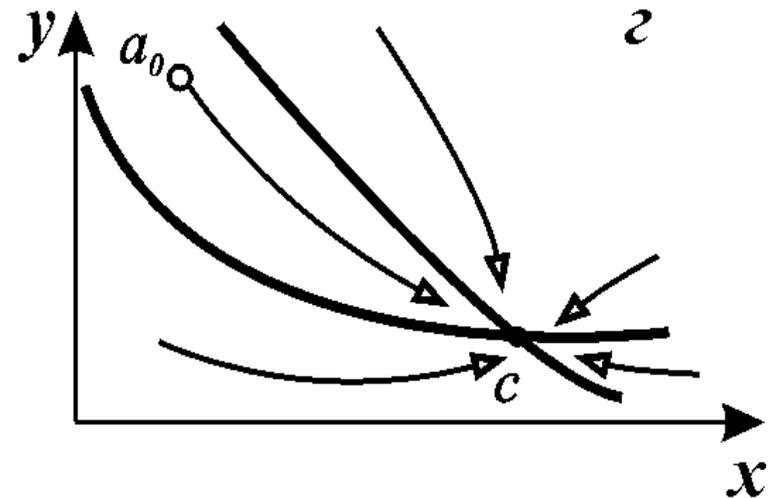
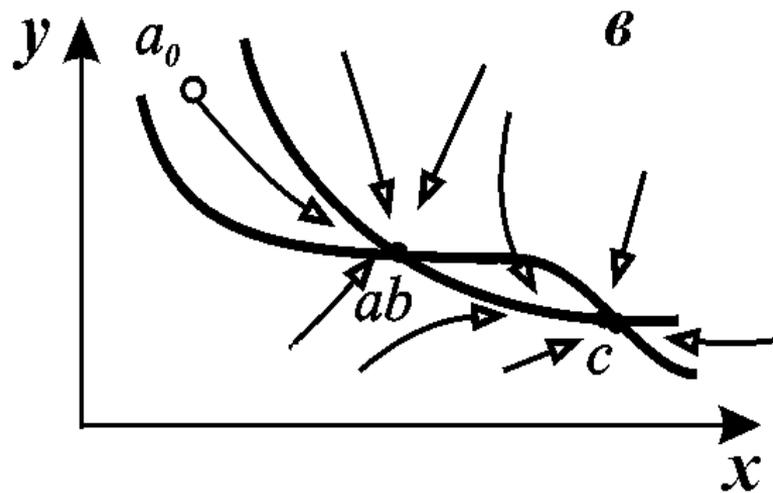
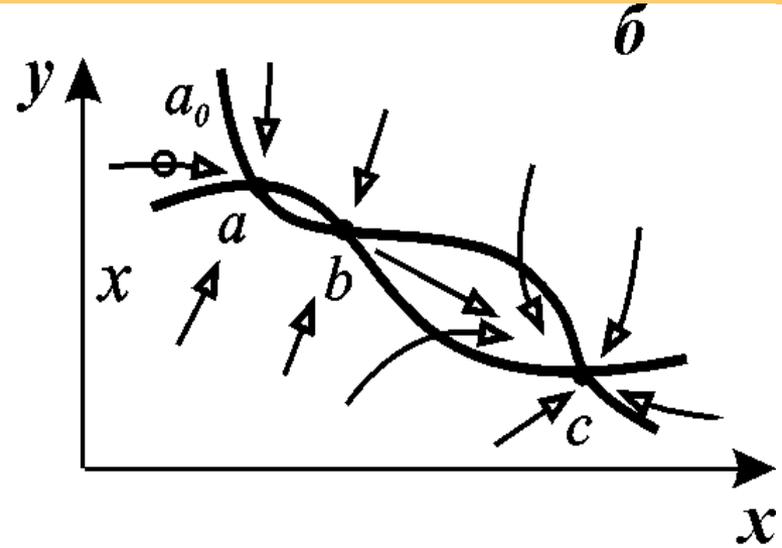
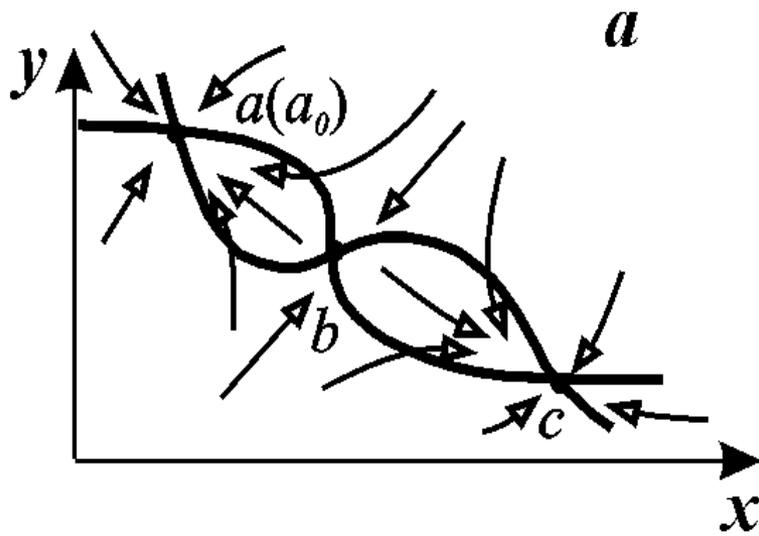
Жирными линиями показаны главные изоклины. Пунктирной линией обозначена сепаратриса, отделяющая области влияния двух устойчивых стационарных состояний a и c .

Стрелка показывает процесс силового переключения триггера.

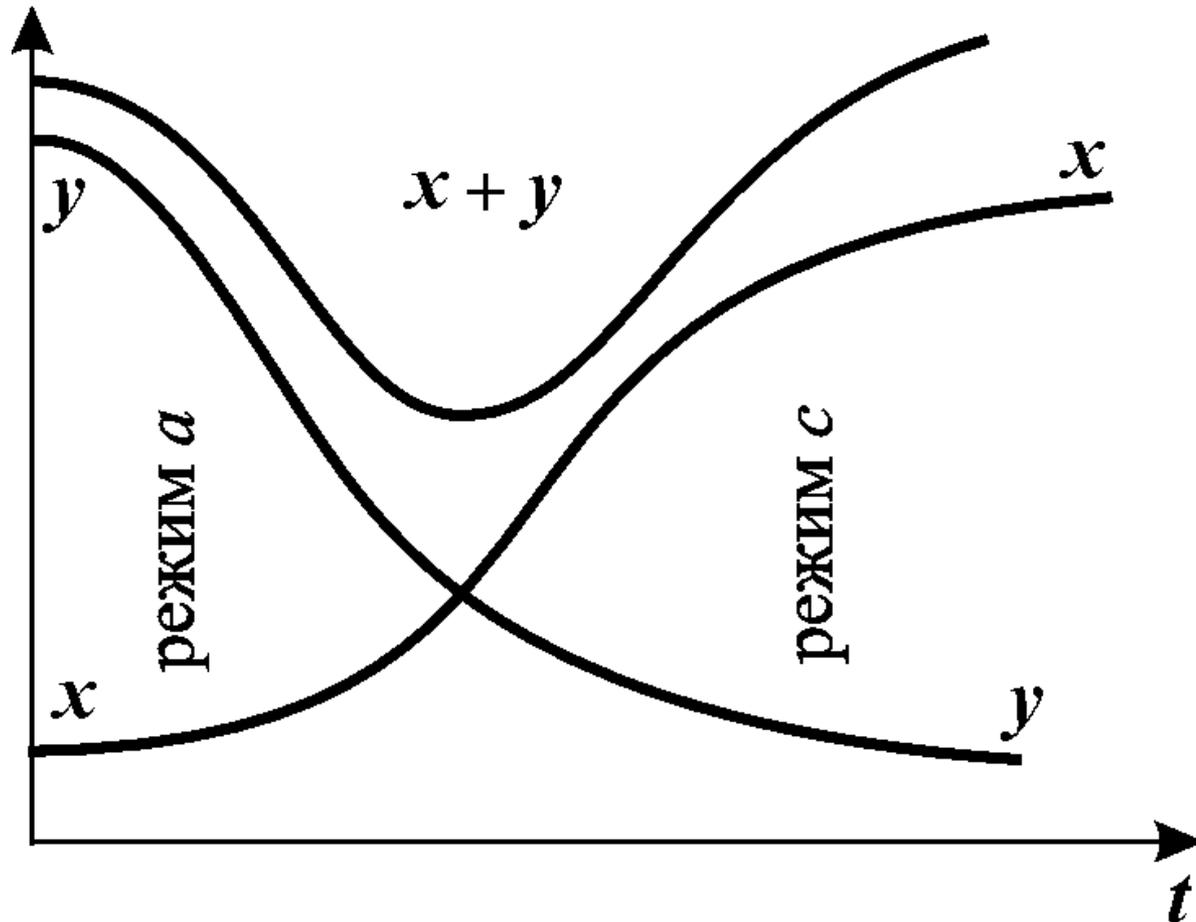
Силовое переключение триггера



Параметрическое переключение триггера



Кинетика изменения переменных в процессе параметрического переключения триггера.

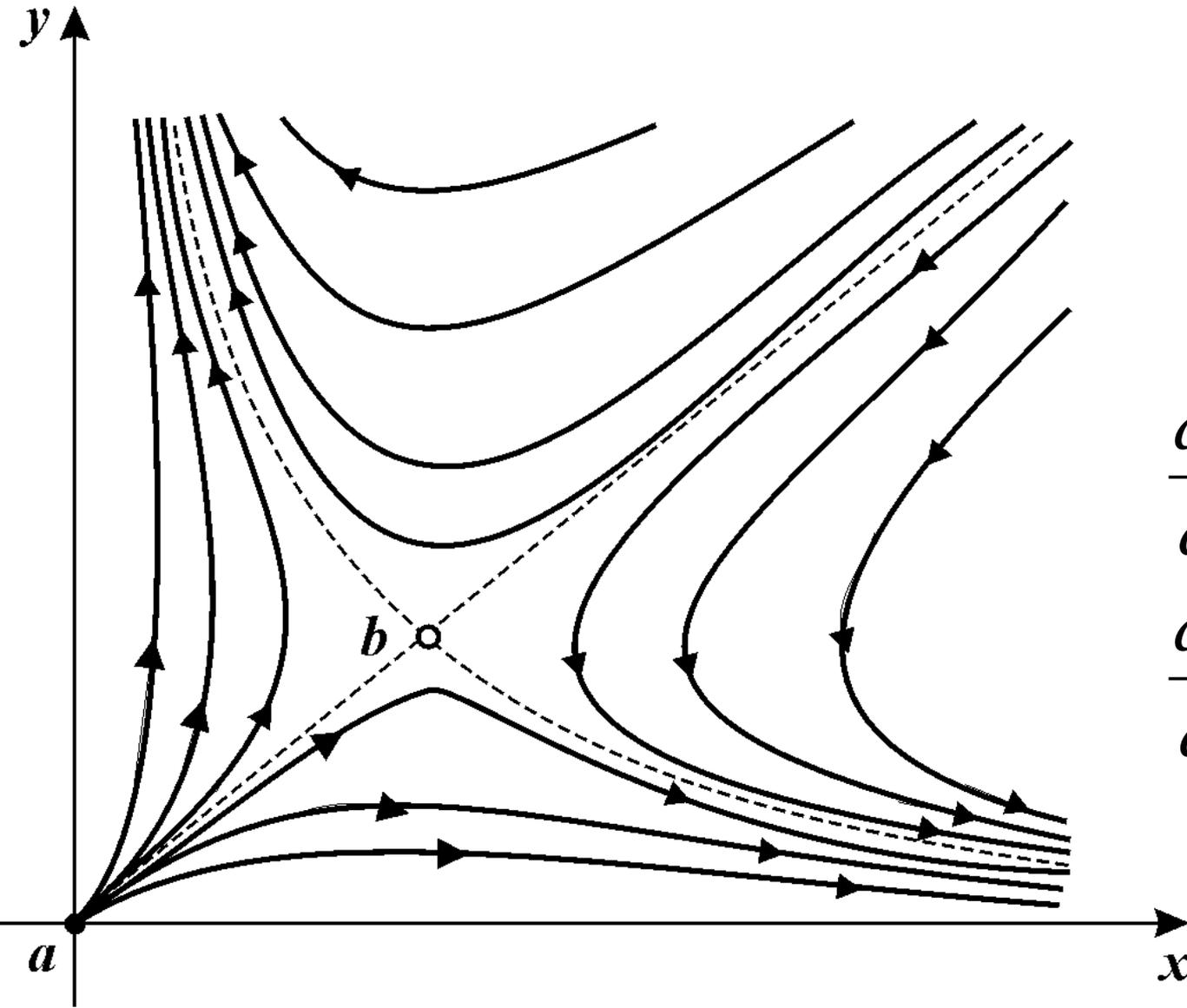


Модели отбора из N равноправных

$$\frac{dx_i}{dt} = aX_i - \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^N X_i X_j; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

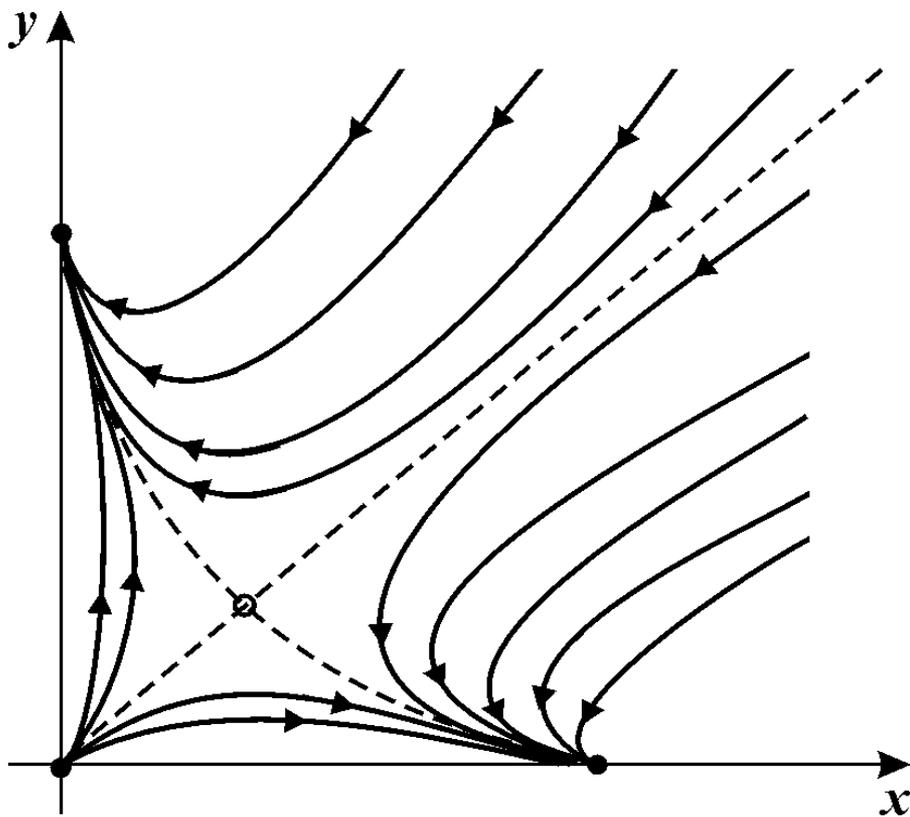
$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy; \quad \frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$

Отбор одного из двух равноправных без ограничений роста



$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$
$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$

Фазовый портрет триггерной системы,
описывающей конкуренцию
между двумя одинаковыми видами с ограниченной
численностью



$$\frac{dx}{dt} = x - xy - ax^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = y - xy - ay^2.$$

Ограничение численности



Monod Jacques Lucien,
1910-1976 —
французский
микробиолог и
биохимик. Нобелевская
премия по физиологии
и медицине 1965

- Ограничение скорости роста субстратом
- Формула МОНО:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_m S}{K_s + S} x$$

Пример: конкуренция двух одинаковых видов, питающихся одним субстратом (субстрат ограничен)

$$a = \frac{a_0 S}{k_S + S}$$

$$\frac{dX}{dt} = a_0 \frac{S}{K_S + S} X - \beta X - \gamma XY,$$

$$\frac{dY}{dt} = a_0 \frac{S}{K_S + S} Y - \beta Y - \gamma XY.$$

Зависимость скорости роста от концентрации субстрата

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha a_0 \frac{S}{K_S + S} (X + Y) + \nu;$$

Быстрая переменная

Система в безразмерных переменных

$$t' = \beta t; \quad x = \frac{\gamma X}{\beta}; \quad y = \frac{\gamma Y}{\beta};$$

$$z = \frac{\gamma S}{\beta}; \quad v' = \frac{\gamma v}{\beta^2}$$

$$f(z) = \frac{a_0 z}{K_z + z}; \quad K_z = \frac{\gamma K_s}{\beta};$$

$$\frac{dx}{dt} = f(z)x - x - xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = f(z)y - y - xy,$$

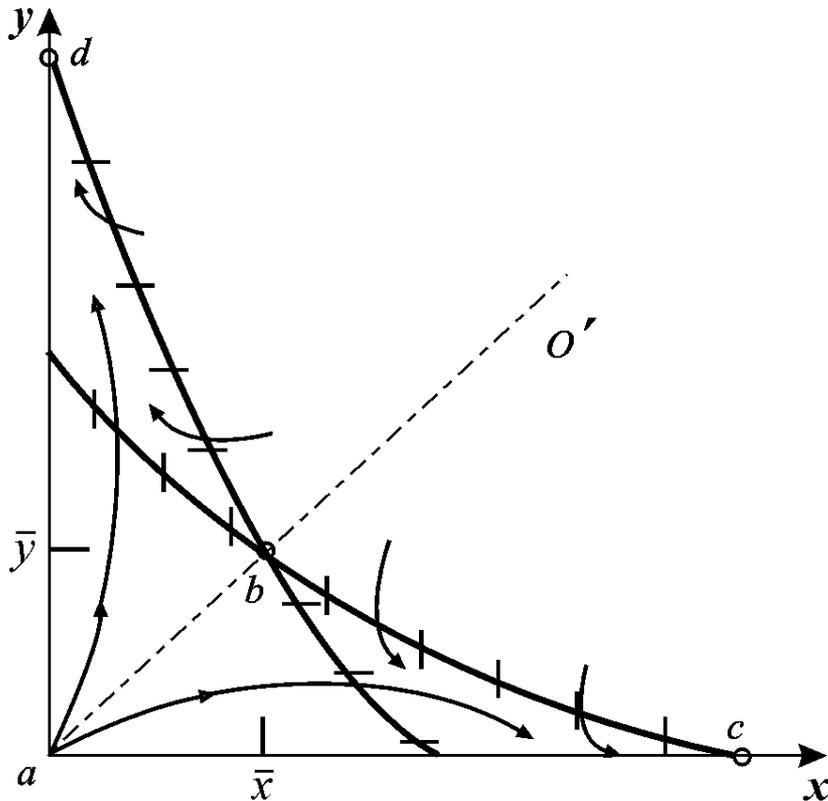
$$\frac{dz}{dt} = -\alpha f(z)(x + y) + v.$$

$$f(z) = \frac{v}{\alpha(x + y)} = \frac{v_0}{x + y}.$$

Z-быстрая переменная

Фазовый портрет системы, описывающей отбор одного из двух равноправных видов когда субстрат поступает в систему с постоянной скоростью.

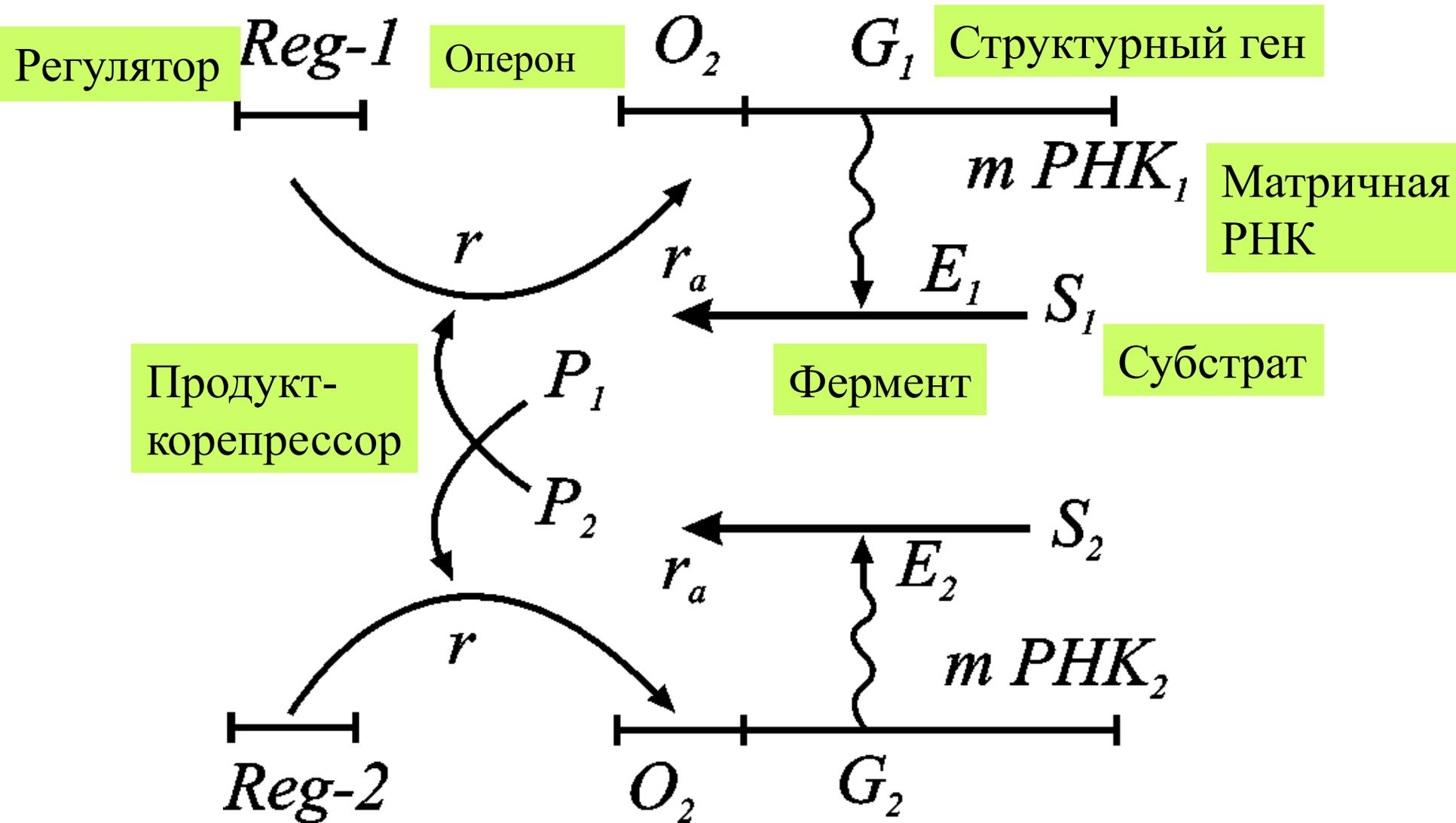
a (начало координат) – неустойчивый узел, b – седло, c, d – устойчивые узлы.



$$\frac{dx}{dt} = x \left[\frac{V_0}{x+y} - (1+y) \right],$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[\frac{V_0}{x+y} - (1+x) \right]$$

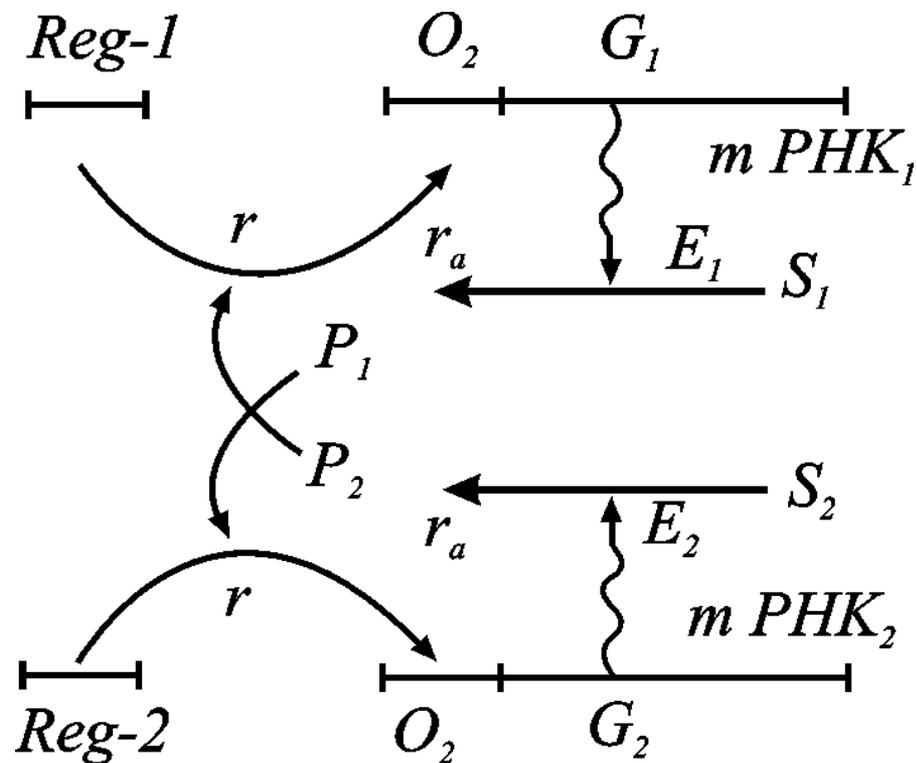
Схема синтеза двух ферментов Жакоба и Моно. Генетический триггер



Модель синтеза двух ферментов Жакоба и Моно. Генетический триггер

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{A_1}{B_1 + P_2^m} - q_1 P_1,$$

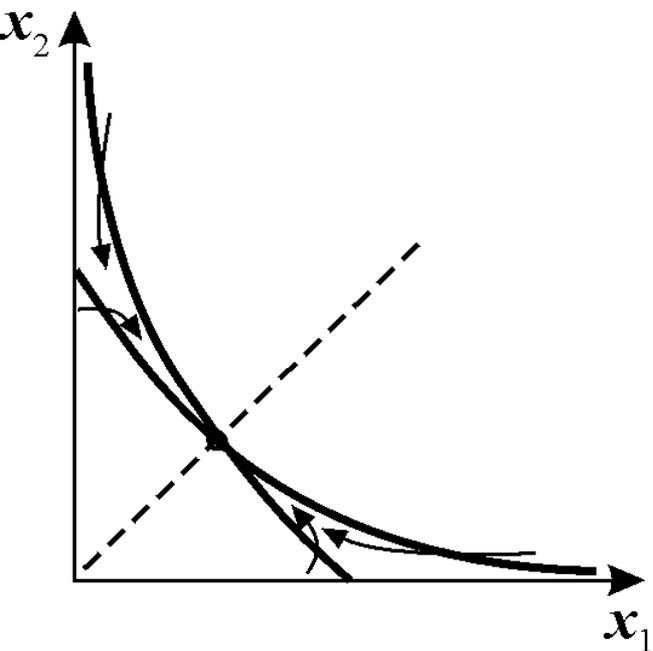
$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{A_2}{B_2 + P_1^m} - q_2 P_2.$$



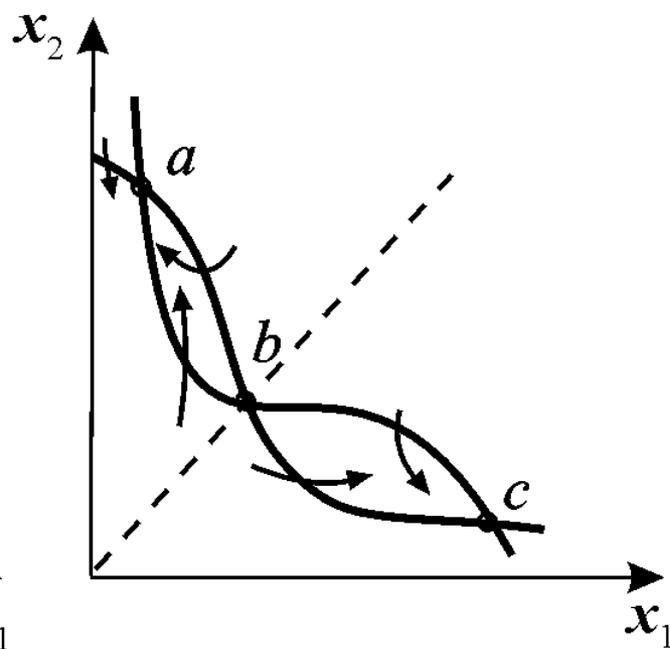
Ю.М.Романовский, Н.В.Степанова, Д.С.Чернавский.

Математические модели в биофизике. 2004

Главные изоклины на фазовой плоскости системы. При $m = 1$. система имеет единственное устойчивое стационарное состояние (a). При $m = 2$ в системе три стационарных состояния, два из которых (a и c) – устойчивые узлы, а третье (b) – седло.



$m=1$

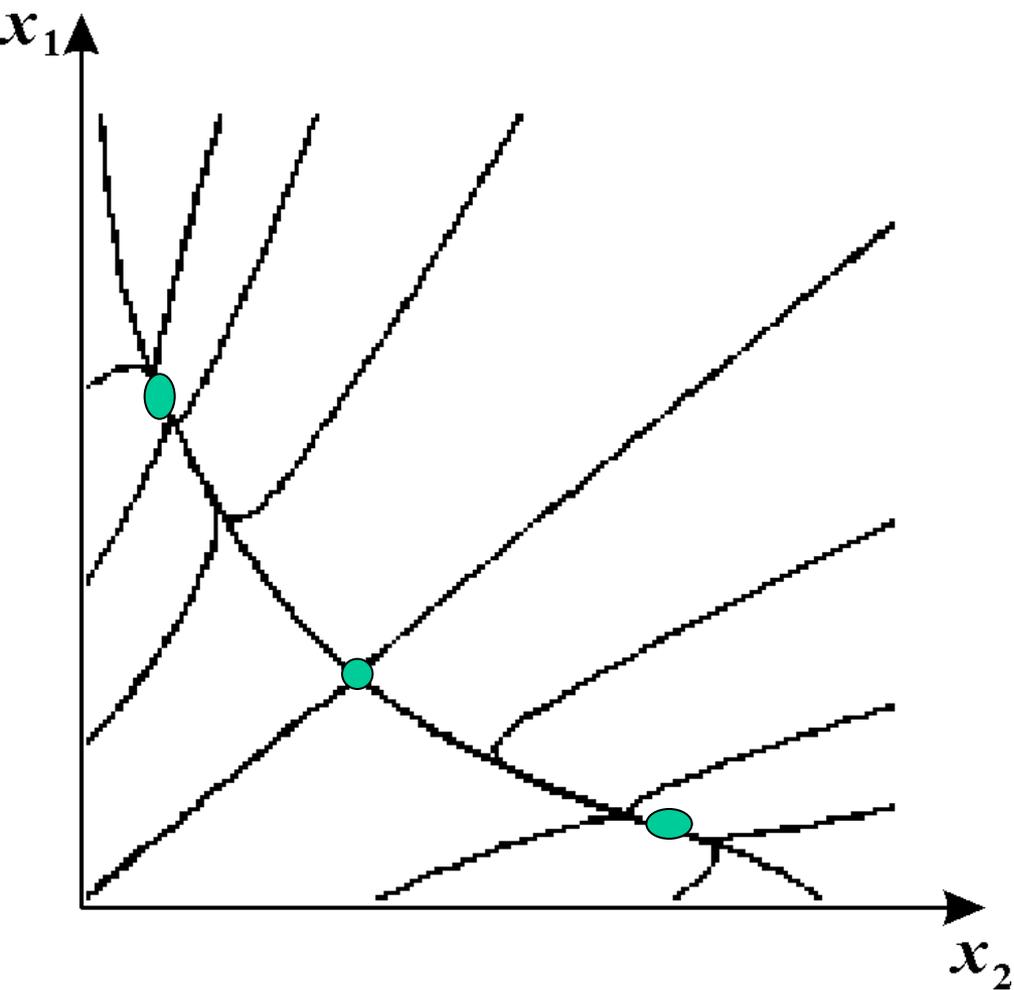


$m=2$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{L_1}{1 + x_2^m} - x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{L_2}{1 + x_1^m} - x_2$$

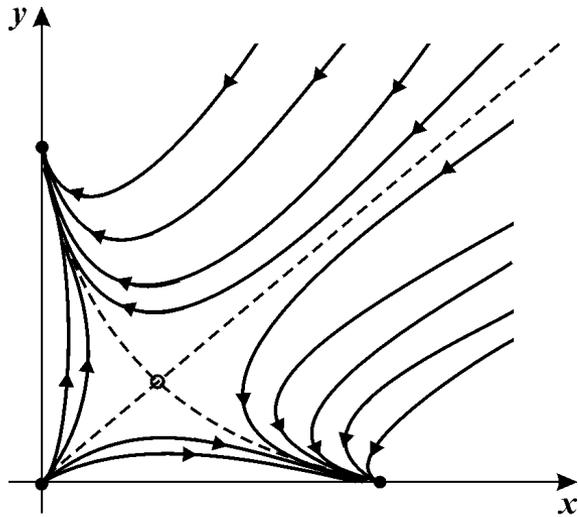
Фазовый портрет триггерной системы Жакоба и Моно



$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{L_1}{1+x_2^m} - x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{L_2}{1+x_1^m} - x_2$$

$$L_1=L_2=3; \quad m=2$$

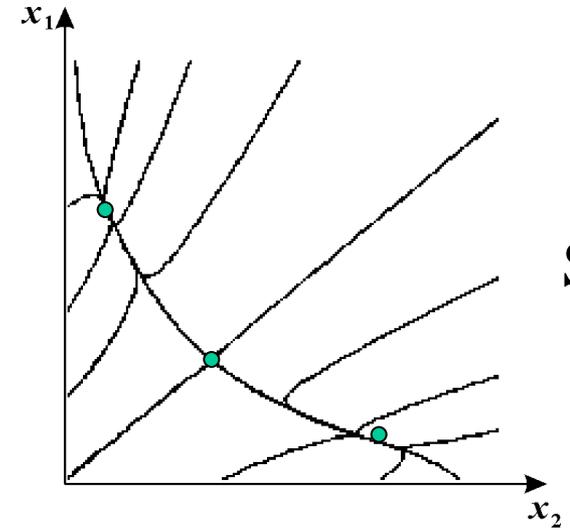
Отличие процессов эволюции и синтеза



EVO

$$\frac{dx}{dt} = x - xy - ax^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = y - xy - ay^2.$$

Уничтожение лишних



SYN

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{L_1}{1 + x_2^m} - x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{L_2}{1 + x_1^m} - x_2$$

Замедление процессов

Жак Люсьён Моно́ (*Jacques Lucien Monod* 1910-1976)



Французский биохимик и микробиолог, лауреат Нобелевской премии по биохимии и медицине 1965 совместно с Франсуа Жакобом и Андре Львовым и «за открытия, касающиеся генетического контроля синтеза ферментов и вирусов». Моно разработал метод непрерывного культивирования микроорганизмов. Во время второй мировой войны (1940-1945) принимал активное участие во французском сопротивлении. В своей широко известной биологической и философской работе «Случайность и необходимость» (1970) Моно, основываясь на последних открытиях в области биохимии, утверждал, что все формы жизни – это результат случайных мутаций (случайность) и дарвиновского отбора (необходимость).