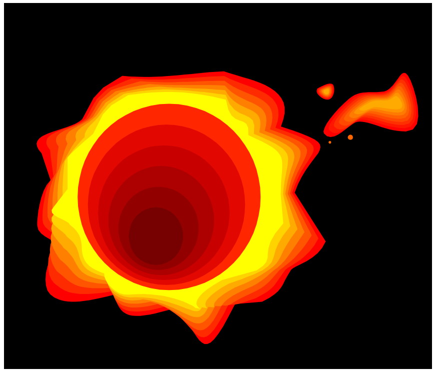
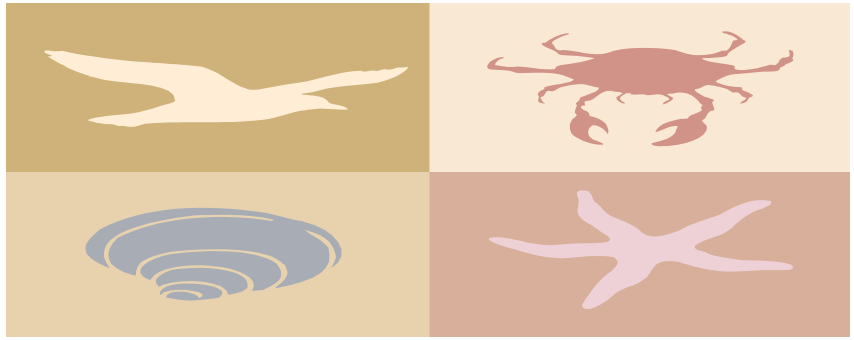
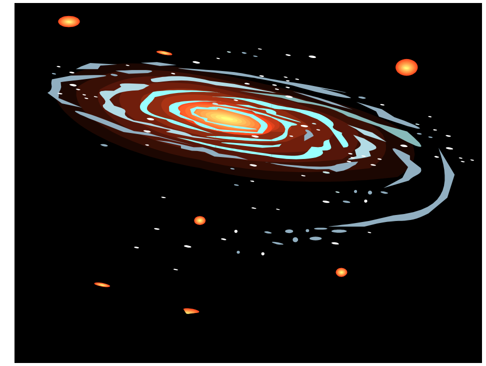






www.biophys.msu.ru

Модели нелинейного мира

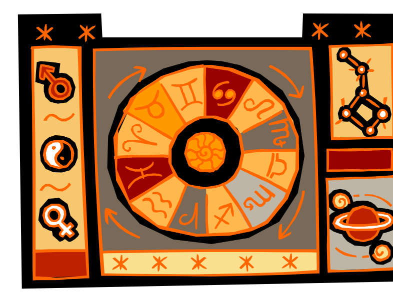
Лекция 5

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(095)9390289; факс: (095)9391115;

E-mail: riznich@biophys.msu.ru

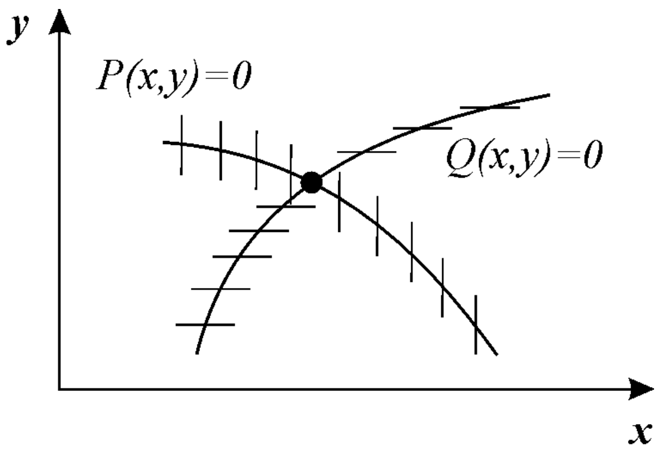


http://mathbio.ru/lectures

Фазовая плоскость

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$



Фазовые траектории

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \; Q(x, y) = 0$$

изоклина горизонтальных касательных

$$\frac{dx}{dt} = 0, \; P\left(x, y\right) = 0$$

Изоклина вертикальных касательных

В стационарной точке

$$\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$$

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \; Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}$$

Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$
$$y = \bar{y} + \eta.$$

Разлагаем правые части в ряд Тейлора, оставляем первые члены

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P_x'(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P_y'(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$c = Q_x'(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q_y'(\bar{x}, \bar{y}).$$

Исследование устойчивости стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Ищем решение в виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

Нетривиальные решения существуют, если

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристический определитель

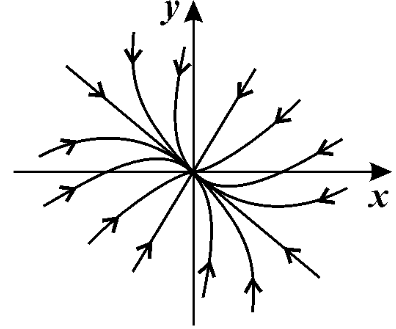
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Типы поведения фазовых траекторий вблизи стационарного состояния

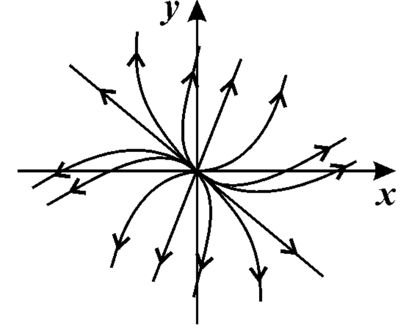
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

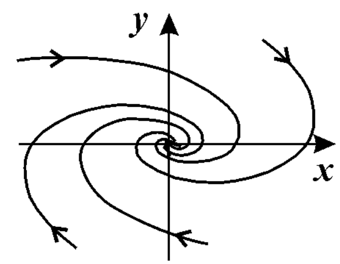
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



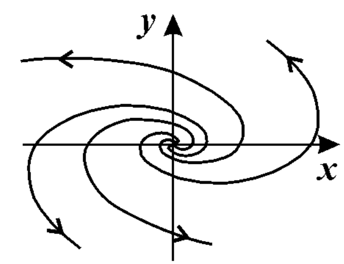
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



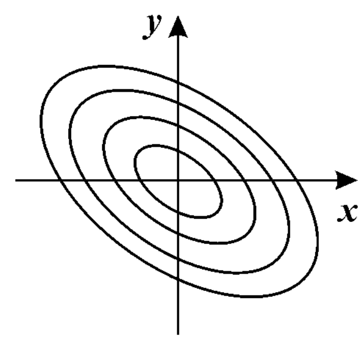
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



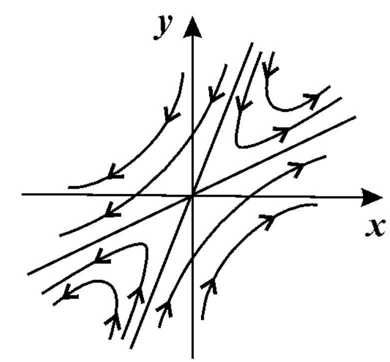
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Линейные химические реакции. Фазовый портрет

$$\xrightarrow{k_1} \mathbf{X} \xrightarrow{k_2} \mathbf{Y} \xrightarrow{k_3}$$

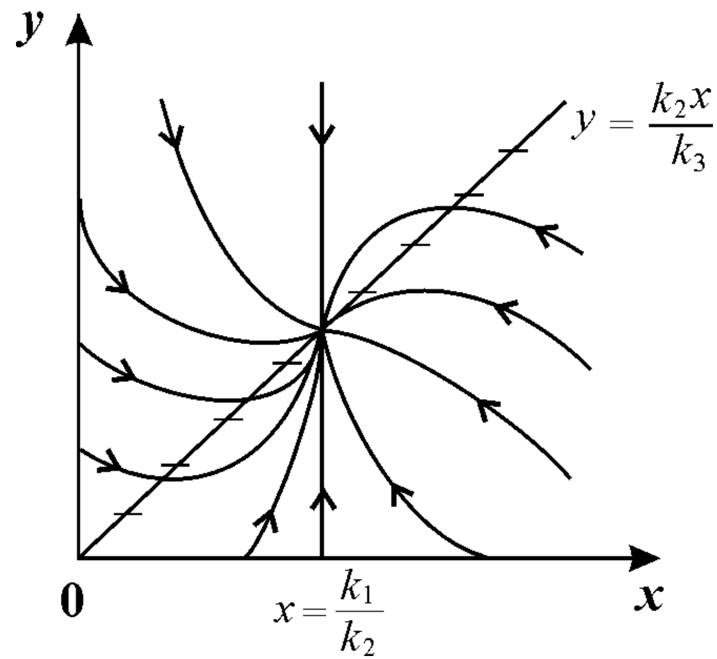
$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x - k_3 y}{k_1 - k_2 x}$$

Изоклина горизонтальных
 касательных

$$\frac{dy}{dx} = 0,\; y = \frac{k_2 x}{k_3}.$$



Изоклина вертикальных
касательных

$$\frac{dy}{dx} = \infty,\; x = \frac{k_1}{k_2}.$$

под каким углом
пересекаются
координатные оси
интегральными
кривыми.

Если $x = 0$, то $\frac{dy}{dx} = -\frac{k_3}{k_1} y$

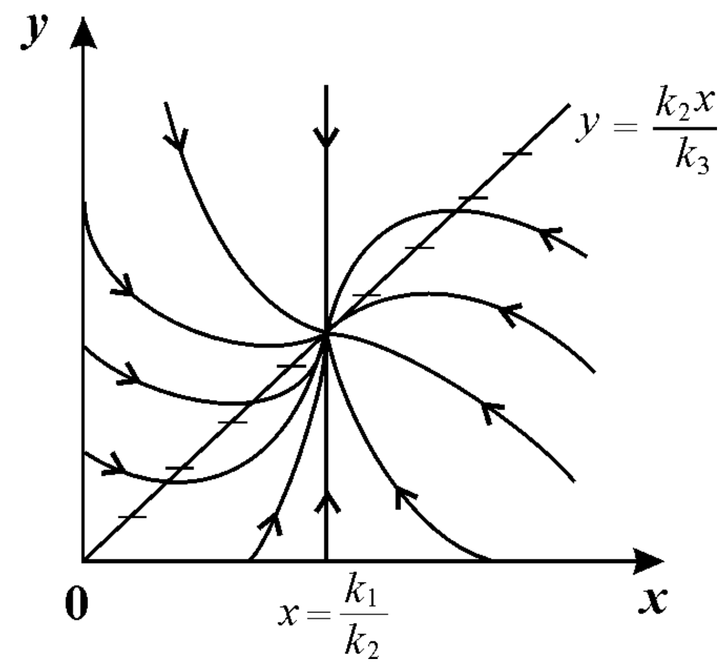
Если y=0, то $\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x}{k_1 - k_2 x}$

Линейные химические реакции. Устойчивость стац. состояния

$$\xrightarrow{k_1} \mathbf{X} \xrightarrow{k_2} \mathbf{Y} \xrightarrow{k_3}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y.$$



$$\begin{vmatrix} -k_2 - \lambda & 0 \\ k_2 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -k_2, \qquad \lambda_2 = -k_3.$$

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$k_0 \qquad\quad k_1 \leftarrow \quad k_2$$

$$\longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow B$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

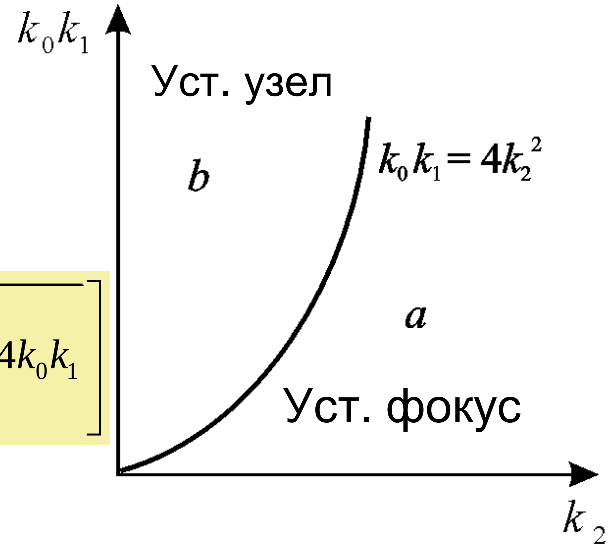
Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

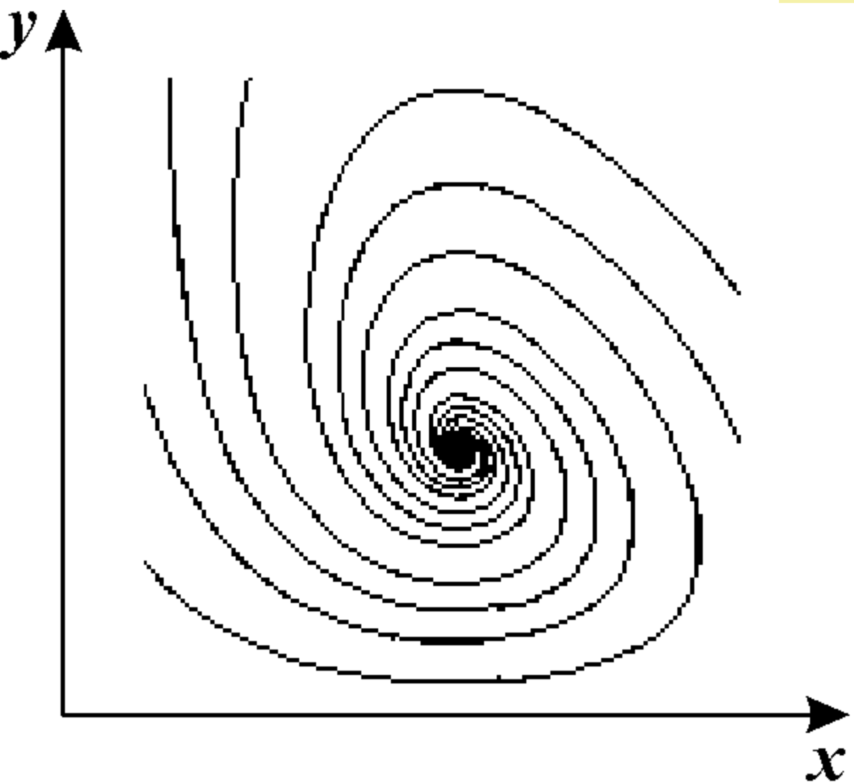
Фазовый портрет
системы Лотки
а – устойчивый фокус,

б – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

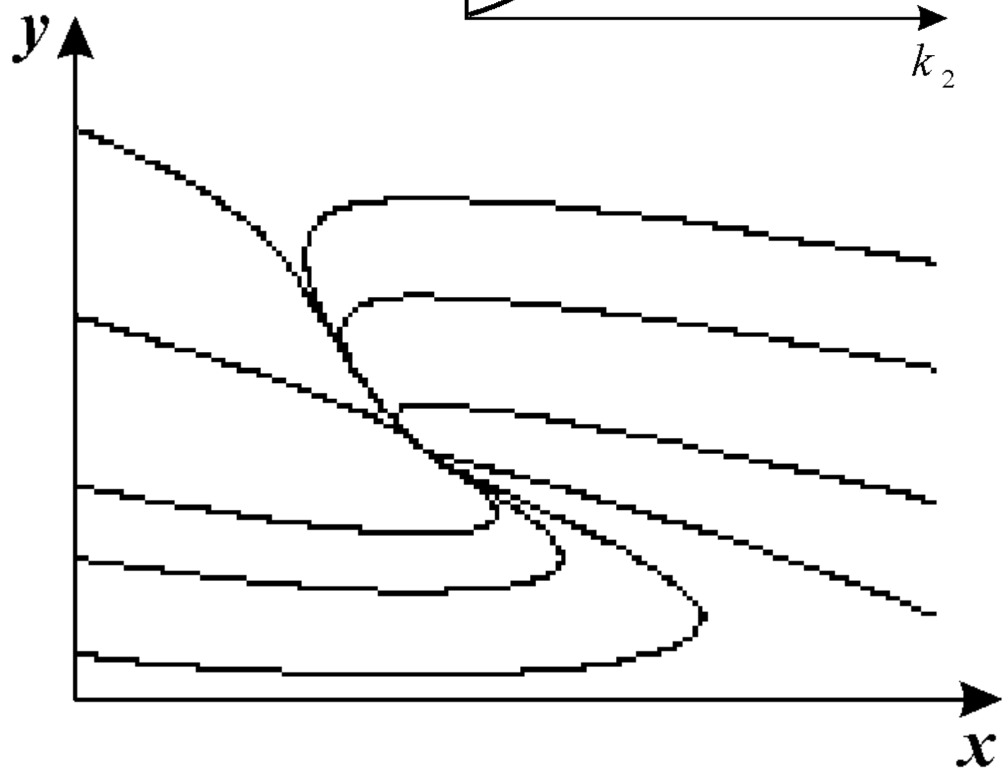
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$





а

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



б

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

Модель Вольтерра

Vito Volterra

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

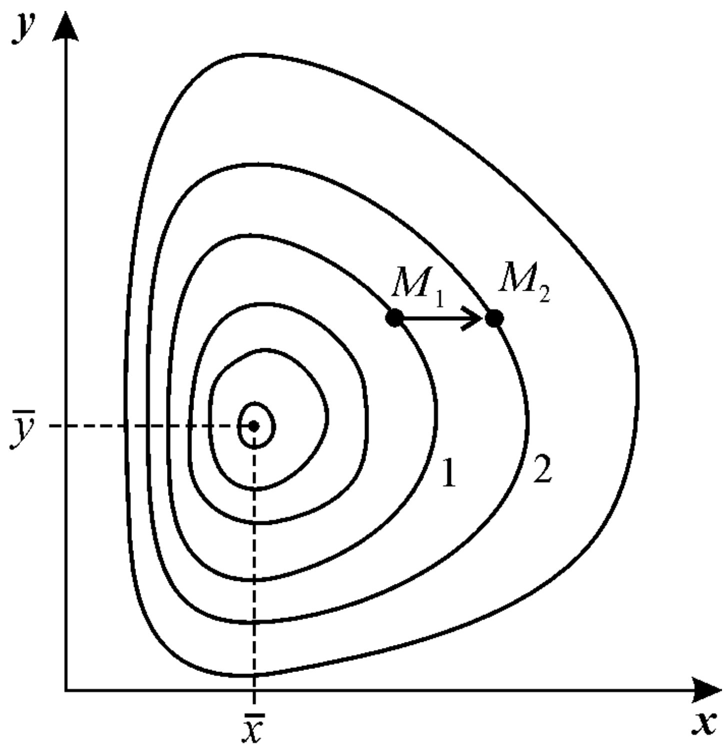
X – численность жертв
Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

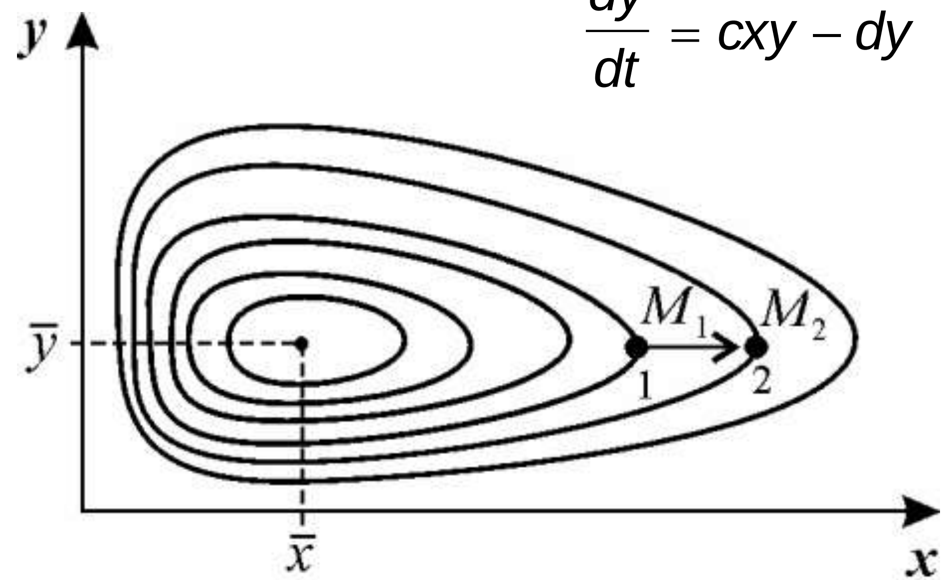
Фазовый портрет модели Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$



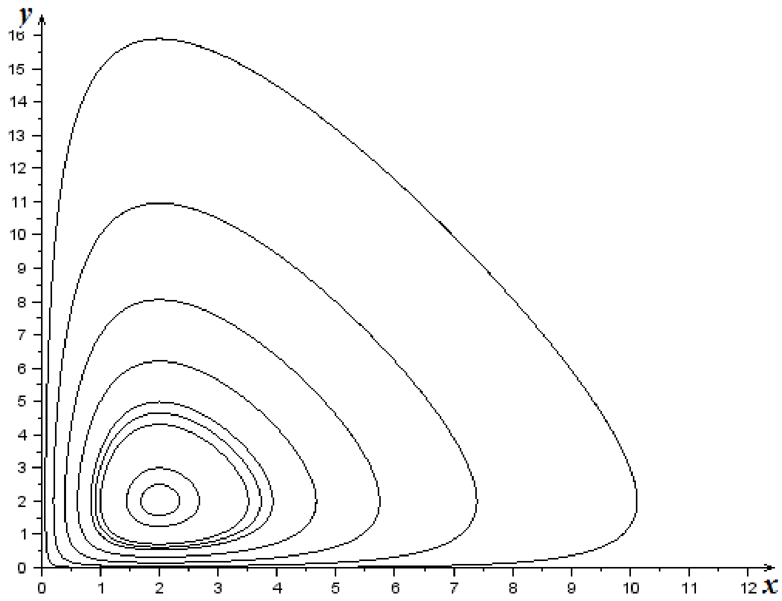
а



б

a= 4, b= 0,3, c=d= 0,4

a=2, b= 0,3, c= d= 0,4



Volterra predator–prey model describing continuous oscillations of the population numbers.

(a) phase pattern;

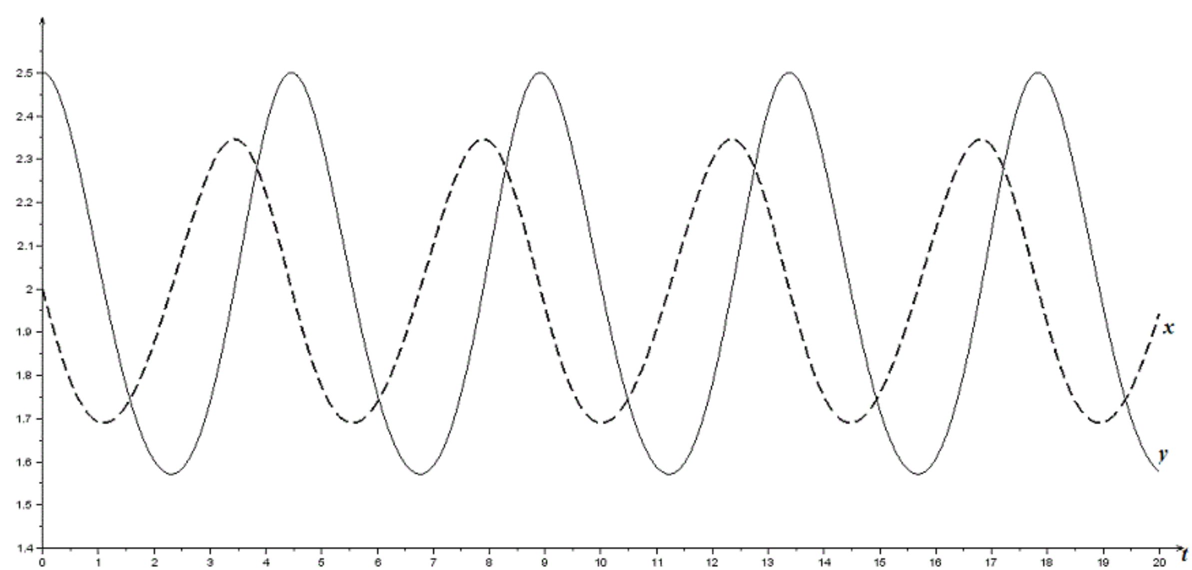
(b) dependence of the numbers of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

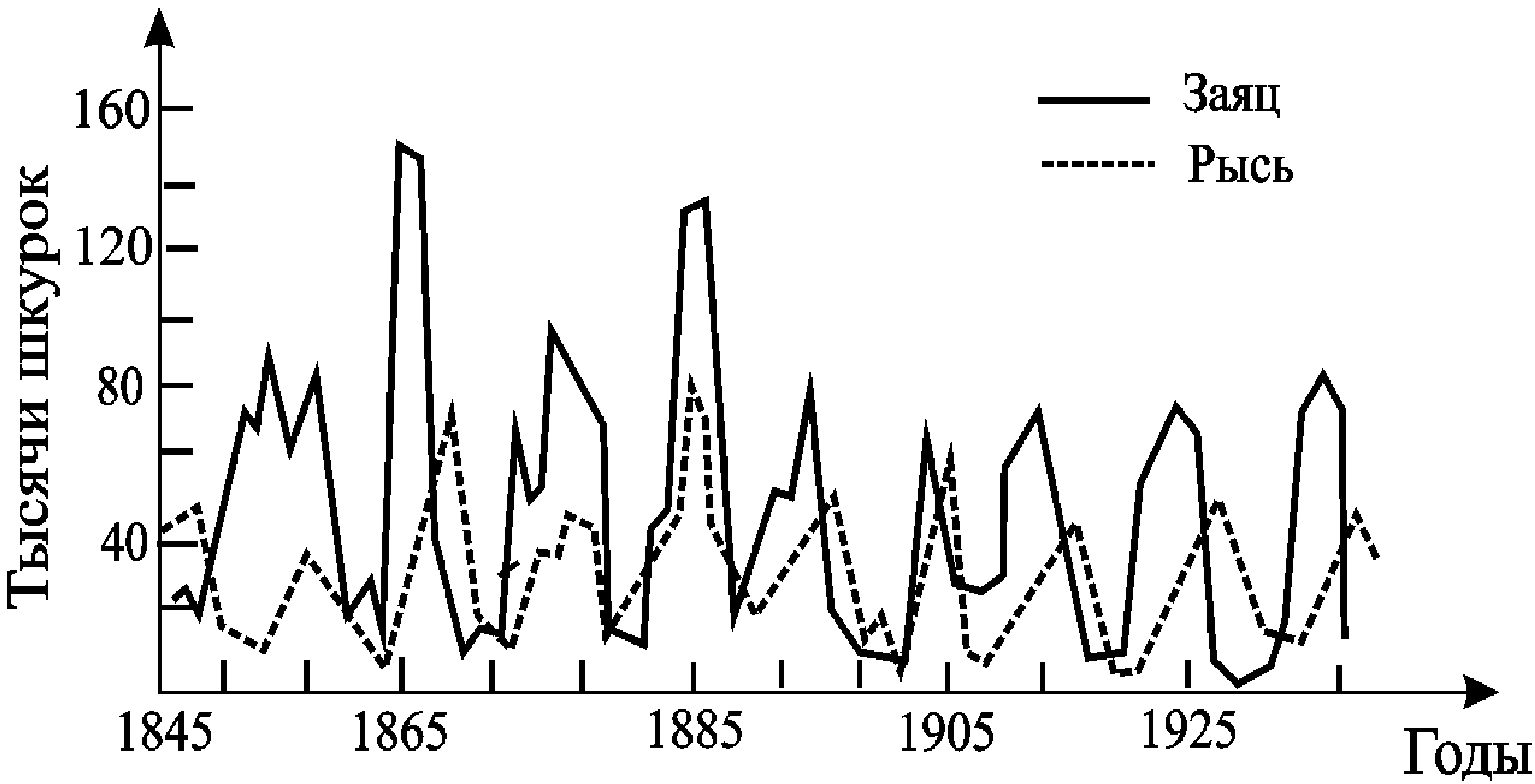
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1;\ b = 0.5;$$

$$c = 1;\ d = 2$$



Кривые численности зайца и рыси в Канаде
(по К. Вилли, В. Детье, 1974)



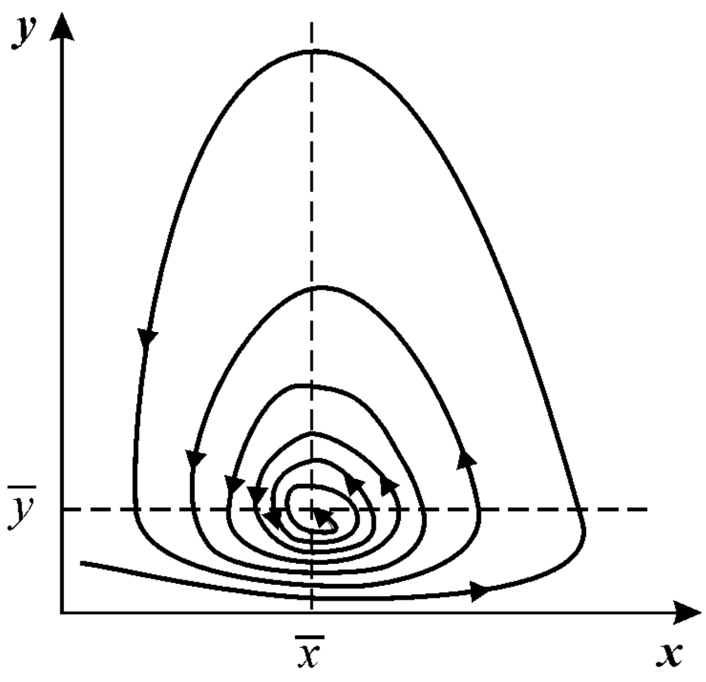
Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \delta_x x^2,$$

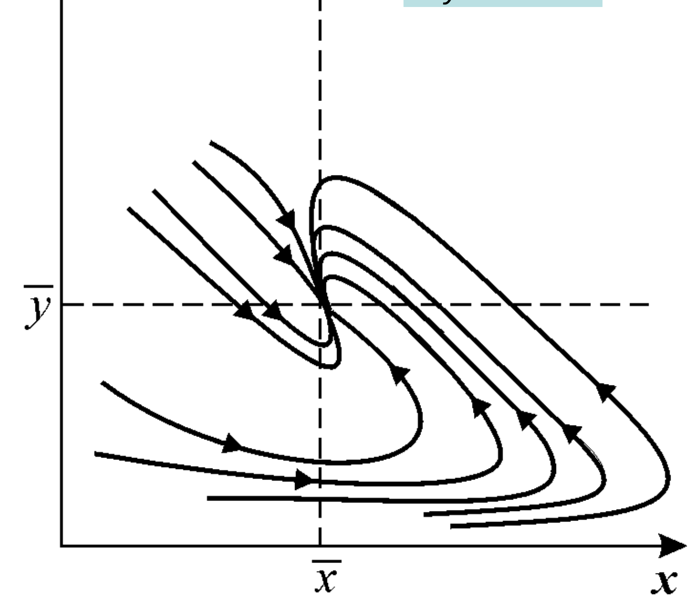
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy - \delta_y y^2.$$

a= 2,
b= 1,
δ_x=1,
c= 3,
d= 1,
δ_y=1

a= 2,
b= 18,
δ_x=1,
c= 3,
d= 5, δ_y=1

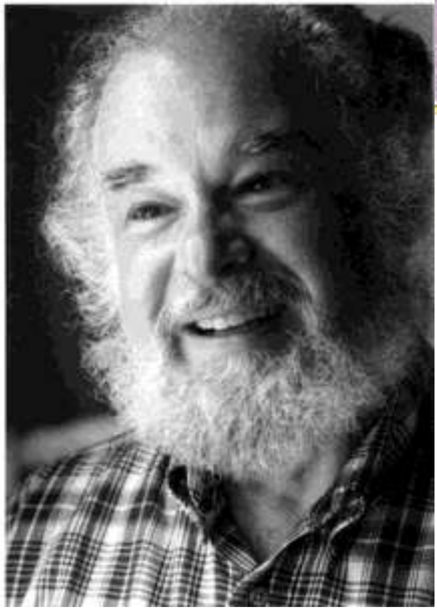


а



б

Модель Розенцвейга-Макартура (1965)



МакА́ртур Роберт
(MacArthur Robert,
1930-1972)

Американский биолог, эколог. Работы по динамике популяций и разнообразию экологических сообществ

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - yL(x),$$

$$\frac{dy}{dt} = -ey + kyL(x).$$

Розенцве́йг Майкл Л.
(Rosenzweig Michael L.)

Профессор. Университета Аризона, США основатель и главный редактор журнала "Evolutionary Ecology" (с 1986)

А.Д. Базыкин

Биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985;
Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М., ИКИ, 2003
Nonlinear dynamics of interacting populations. World Scientific. 1998

Александр Дмитриевич
Базыкин
1940-1954

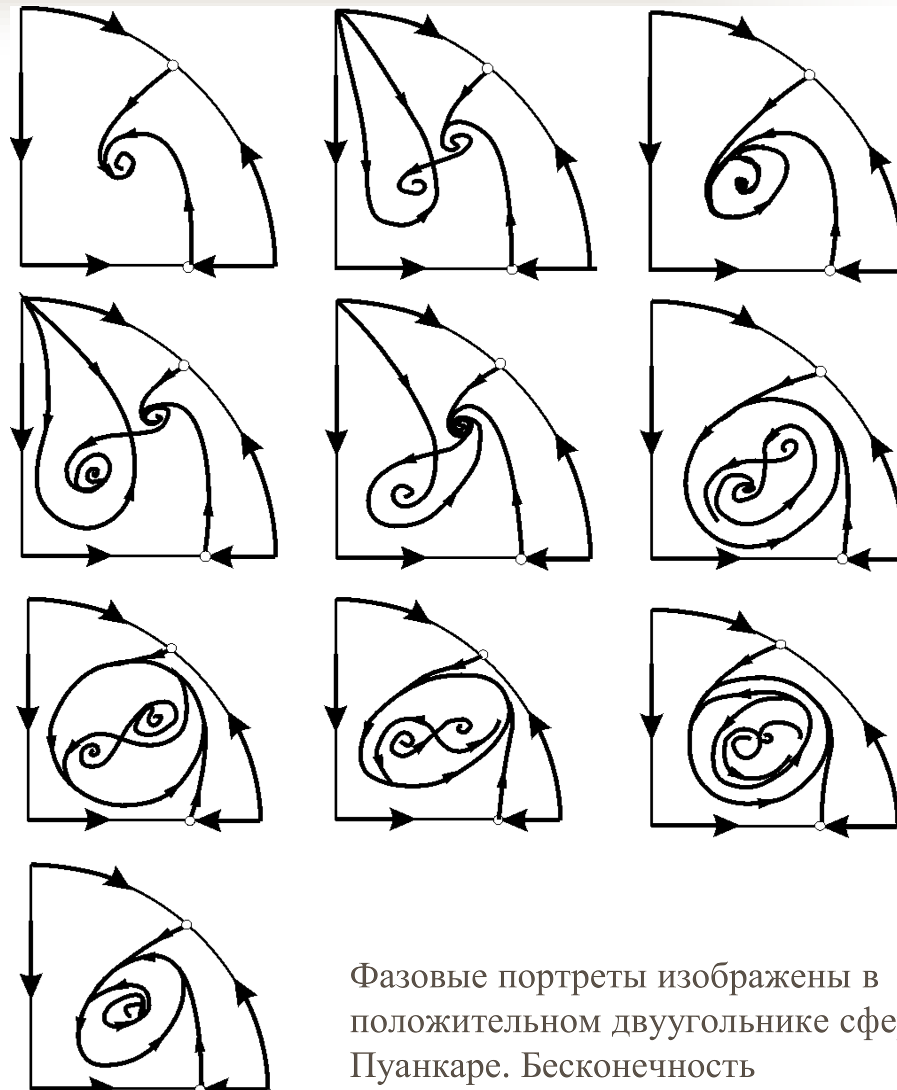
Российский биолог и биофизик
Работы по динамике популяций

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \frac{Bxy}{1+px} - Ex^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + \frac{Dxy}{1+px} - My^2.$$

Набор фазовых портретов системы возможных в конечной части первого квадранта и соответствующих областям 1 - 10 параметрического портрета

(Базыкин, 1985)



Фазовые портреты изображены в положительном двуугольнике сферы Пуанкаре. Бесконечность отображается на внутренность сферы конечного радиуса

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

Вопросы

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - yL(x),$$
$$\frac{dy}{dt} = -ey + kyL(x).$$

- В Вашей области знания
- Можно ли говорить о взаимоотношениях типа хищник-жертва (паразит-хозяин)
- Между какими элементами системы возможны такого типа отношения?

- Два вида объектов
- при взаимодействии скорость роста одного типа объектов увеличивается, другого - уменьшается