

# Модели нелинейного мира

[www.biophys.msu.ru](http://www.biophys.msu.ru)

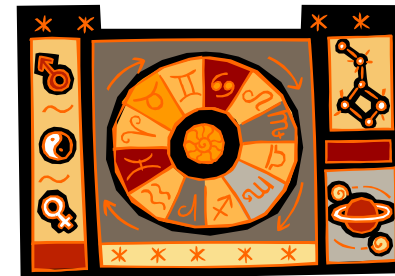
Фазовая плоскость

**Галина Юрьевна Ризниченко**

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского  
государственного университета им.  
М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(095)9390289; факс: (095)9391115;

E-mail: [riznich@biophys.msu.ru](mailto:riznich@biophys.msu.ru)



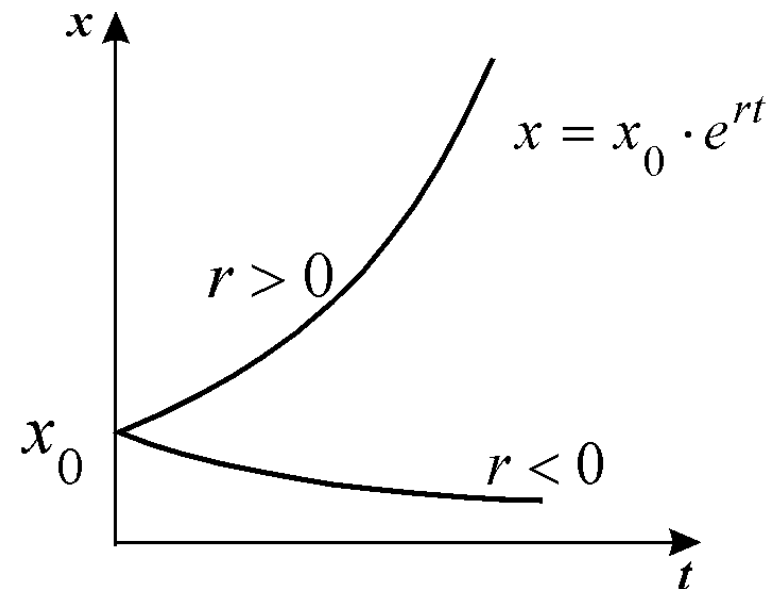
<http://mathbio.professorjournal.ru/lectures>

# Линейный мир

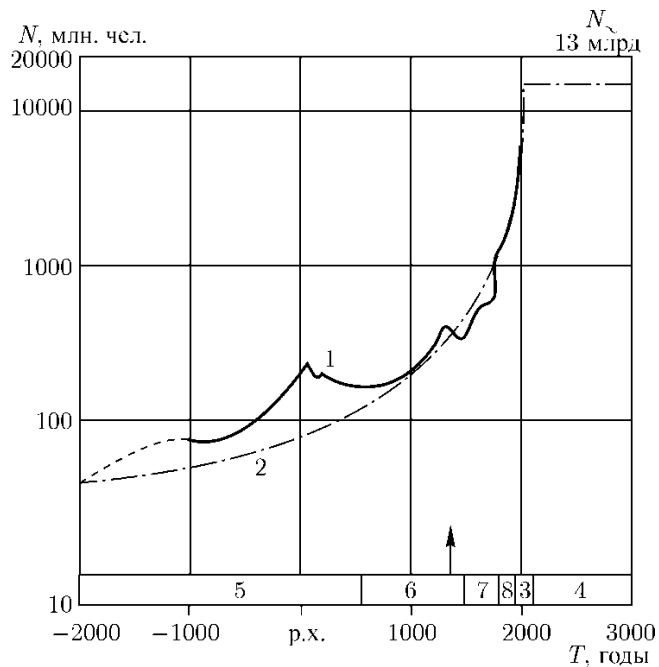
- **Линейное дифференциальное уравнение.**

Уравнение роста популяции Мальтуса (1798)

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



Рост человечества.  
Капица. 2004



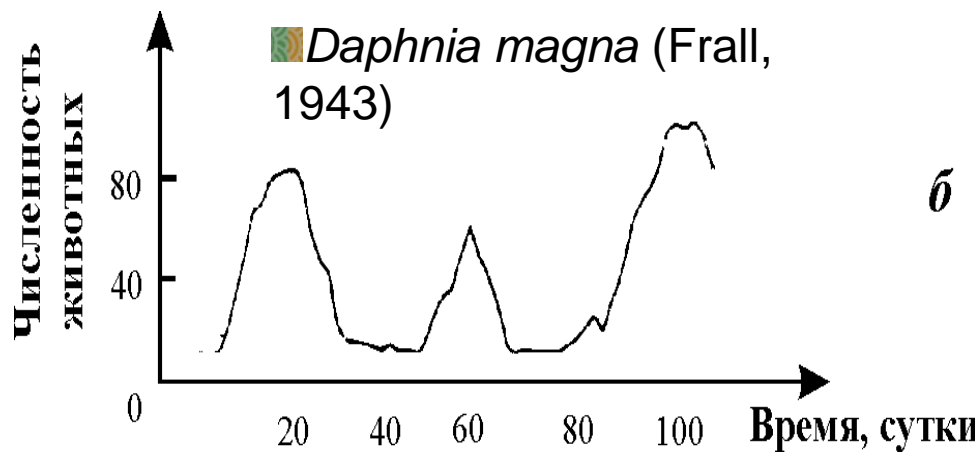
# Нелинейный мир



Поголовье овец, тыс.



a



б

# Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

# Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

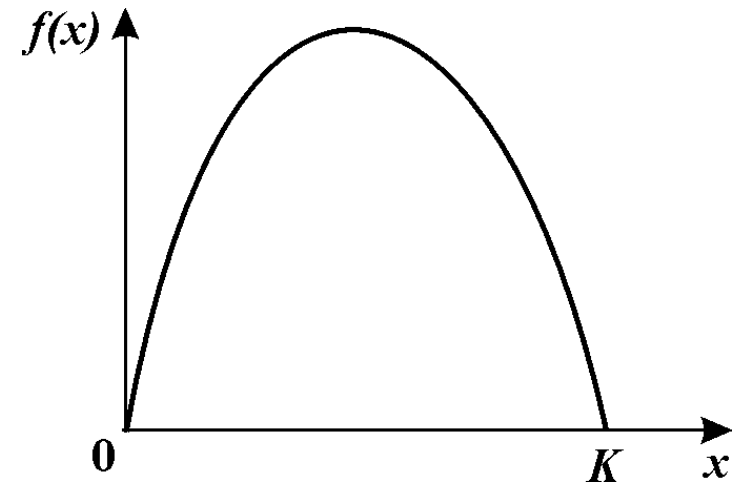
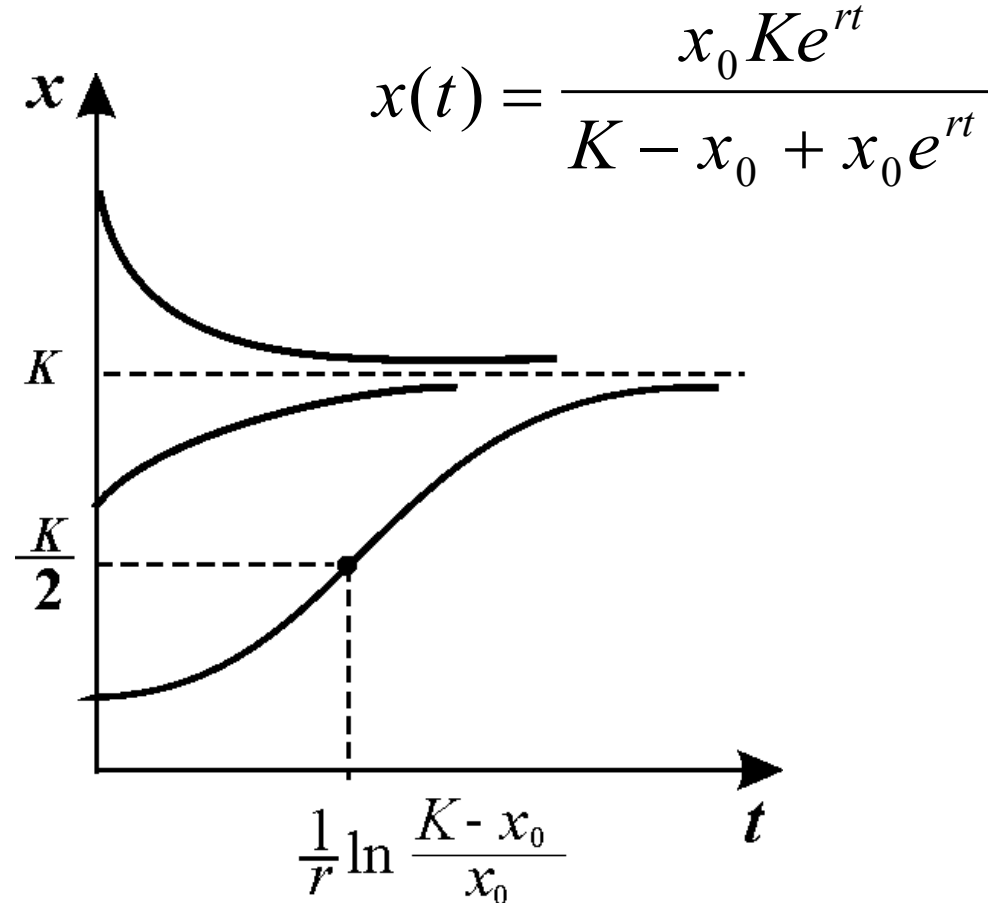


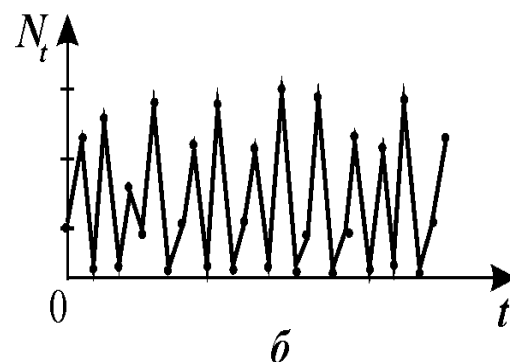
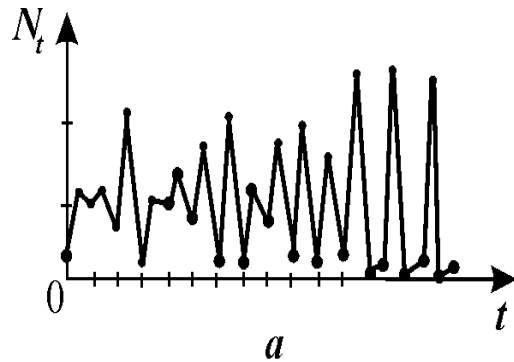
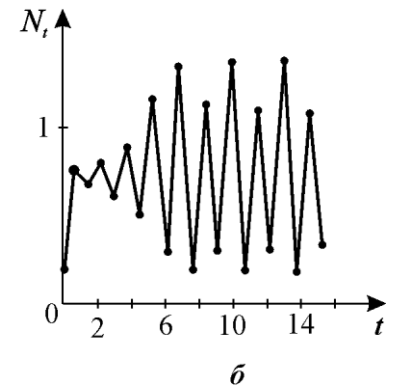
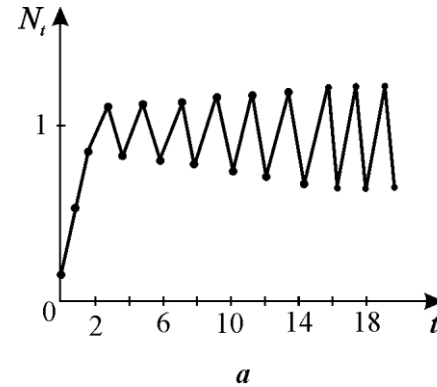
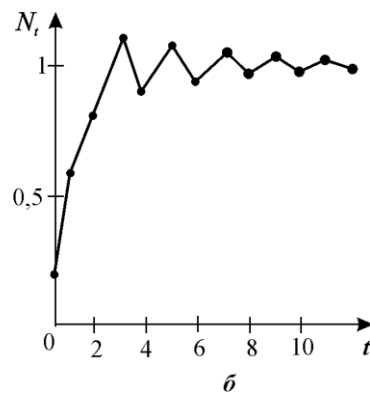
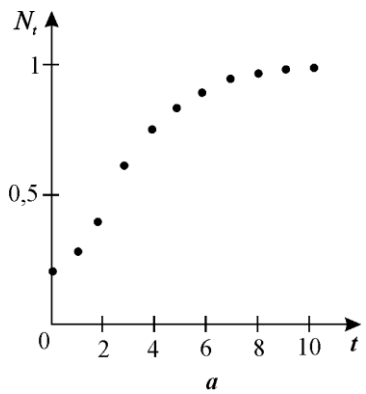
График функции  $f(x)$



Поведение  $x$  во времени

# Дискретная модель логистического роста

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$



# Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

# Динамическая система

- Динамическая система определяется пространством  $X$  и заданным на нем однозначным оператором  $T(\Delta t)$ , зависящим от параметра  $\Delta t \geq 0$ , так что каждой точке  $x$  оператор  $T$  ставит в соответствие единственную точку  $x^*$ , то есть

$$x^* = T(\Delta t)x$$

- При этом предполагается, что оператор  $T(\Delta t)$  при любых допустимых  $\Delta t_1 \geq 0$  и  $\Delta t_2 \geq 0$  удовлетворяет соотношению
- $T(\Delta t_2) + T(\Delta t_1) = T(\Delta t_1 + \Delta t_2)$



# Пространство состояний

## $X$ – фазовое пространство

- $X$  – пространство возможных состояний рассматриваемой системы
- обычно  $x$  – многомерный вектор с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Описание  $x$  называется **состоянием**, или **фазовой точкой** (изображающей, представляющей точкой)

# Система дифф. ур-ний 1-го порядка – динамическая система

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tau(\Delta t)}{\Delta t} = L,$$

то состояние  $x$  как функция  $t$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = Lx$$

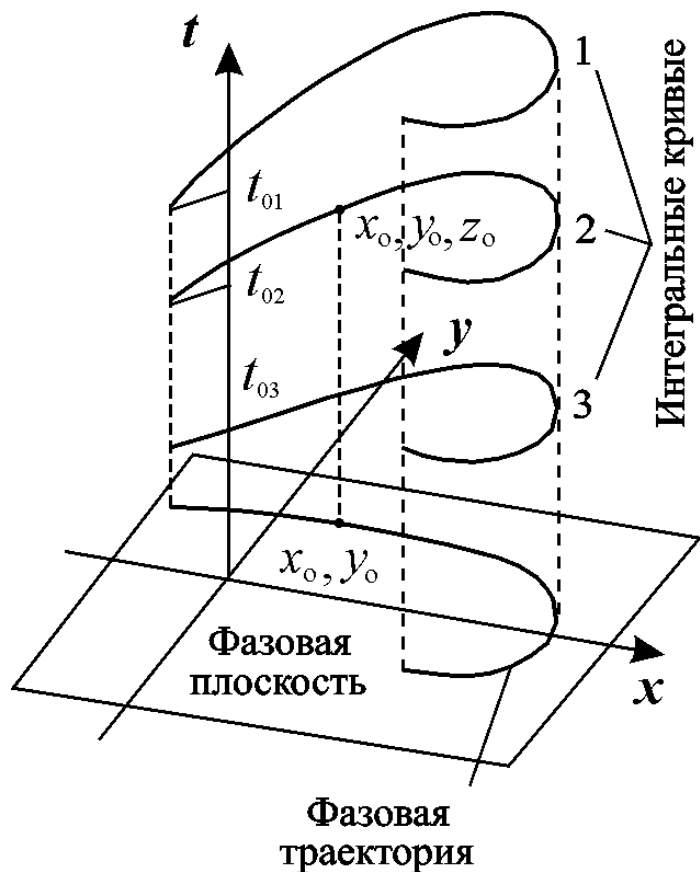
Изменение состояния динамической системы может быть представлено системой дифференциальных уравнений 1-го порядка.

# Игра «Жизнь» Конуэла

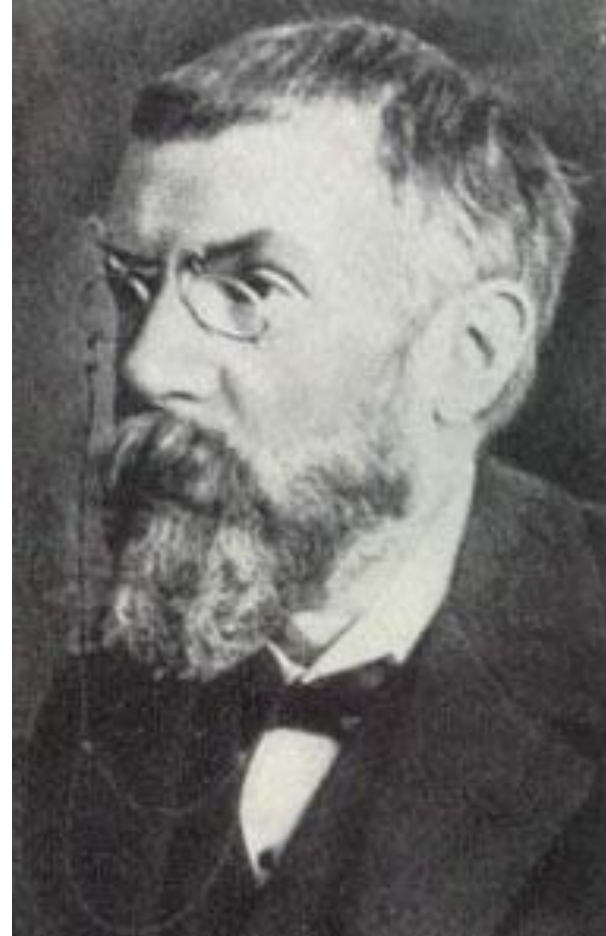
- Пространство состояний – множество всевозможных расположений фишек
- Состояние задается матрицей (8X8), элементы кот. – единицы и нули. 1 – на клетке стоит фишка.
- $\Delta t=1$
- оператор T – правила:
  - 1) Фишка остается, если рядом с ней две или три других фишки,
  - 2) Фишка убирается если рядом с ней более трех ли менее двух фишек,
  - 3) На пустой клетке появляется новая фишка. Если рядом с ней было три фишки

Предлагается продемонстрировать Игру Жизнь

# Траектории системы в пространстве $(x, y, t)$



$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$



**Жюль Анри Пуанкаре**  
(Jules Henri Poincaré)  
[1854-1912](#)

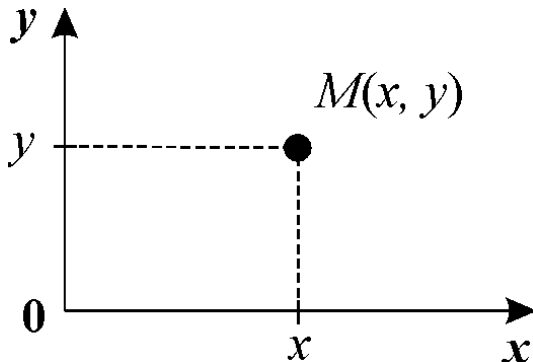
# Фазовый портрет

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Уравнение фазовых траекторий



$P(x, y) > 0, Q(x, y) > 0$	
$P(x, y) < 0, Q(x, y) < 0$	
$P(x, y) > 0, Q(x, y) < 0$	
$P(x, y) < 0, Q(x, y) > 0$	

# ИЗОКЛИНЫ

Уравнение изоклин

$$A = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

В стационарной точке  $(\bar{x}, \bar{y})$

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}$$

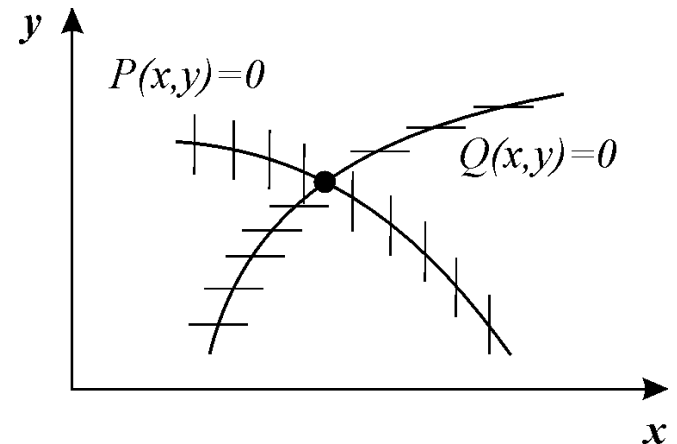
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

изоклина  
горизонтальных  
касательных

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad P(x, y) = 0$$

Изоклина  
вертикальных  
касательных



# В химии и биологии, политологии, социологии

- Фазовые переменные
- – концентрации веществ
- - численности видов животных
- Численности коллективов
- Численность населения стран

# Сражающиеся армии



Раковорская битва (1267)

(Раковор – древнерусское название; Везенбург - немецкое)  
между рыцарями Тевтонского ордена и войском Северо-запада и Северо-востока Руси.

Переменные -  
численности:

$x, y$

Параметры –  
эффективности:  
 $a, b$



# Численности сражающихся армий

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -ax$$

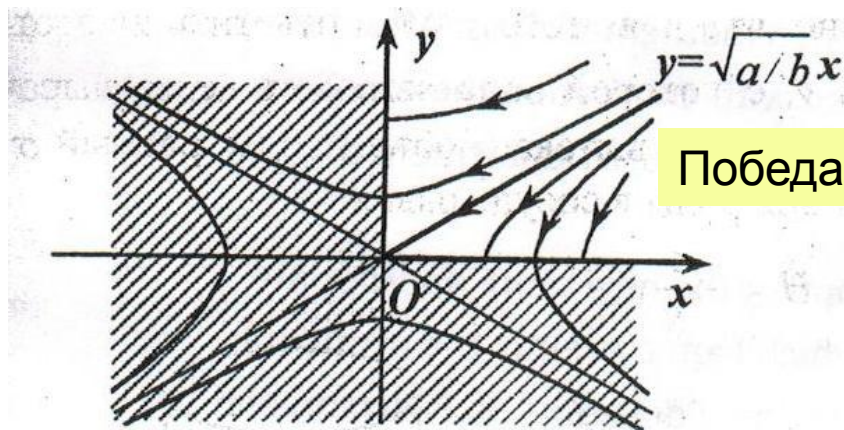
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{by},$$

$$ax dx = by dy,$$

$$ax^2 - by^2 = ax^2(0) - by^2(0) = Const;$$

$$y_0 > \sqrt{\frac{a}{b}} x_0$$

Победа y



$$y_0 < \sqrt{\frac{a}{b}} x_0$$

Победа x

Ю.И.Неймарк.  
Математические  
модели в  
естествознании и  
технике

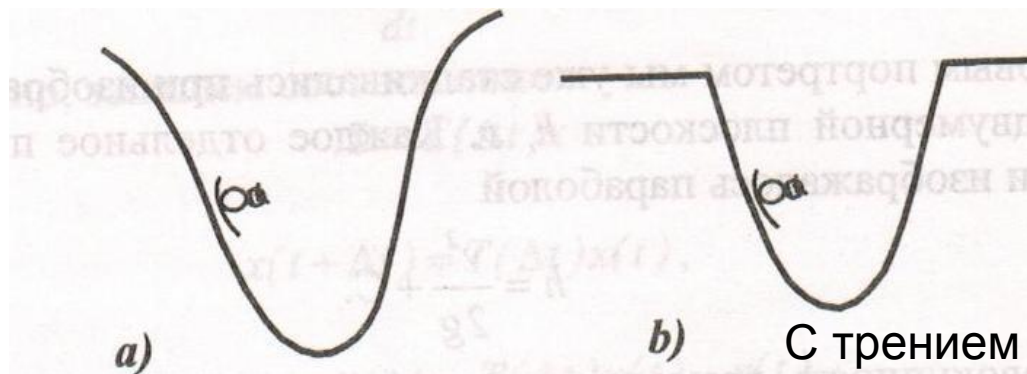
Рис. 1.19. Фазовый портрет динамики численностей «сражающихся армий»

Чтобы победила армия, начальная численность кот. в 2 раза меньше, нужно, чтобы ее «эффективность» была в 4 раза больше

Математики! Объясните, почему фазовые траектории имеют такой вид.

Рассмотреть более сложную модель сражения

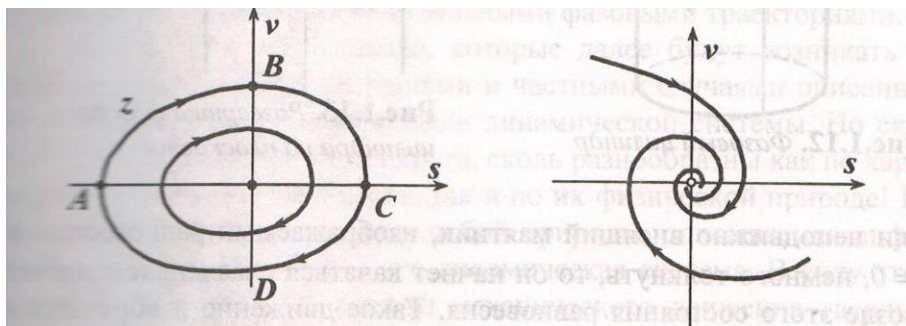
# В физике часто фазовыми переменными являются расстояние и скорость



S- расстояние от центра горки  
V - скорость

$$v = \frac{dS}{dt}$$

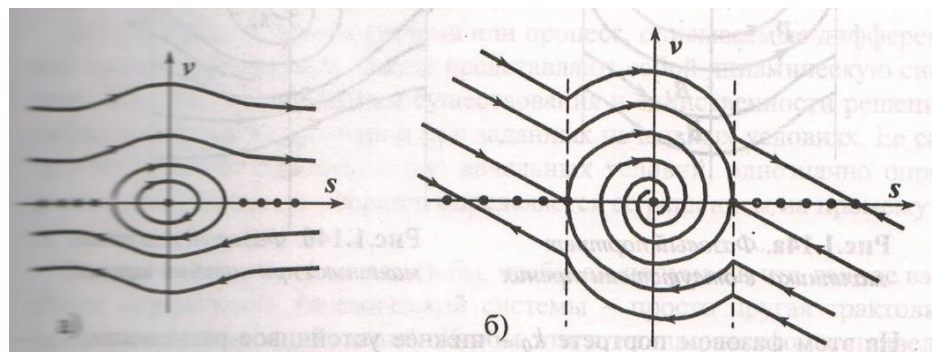
Фазовые портреты



Без трения

С трением

Горка без краев

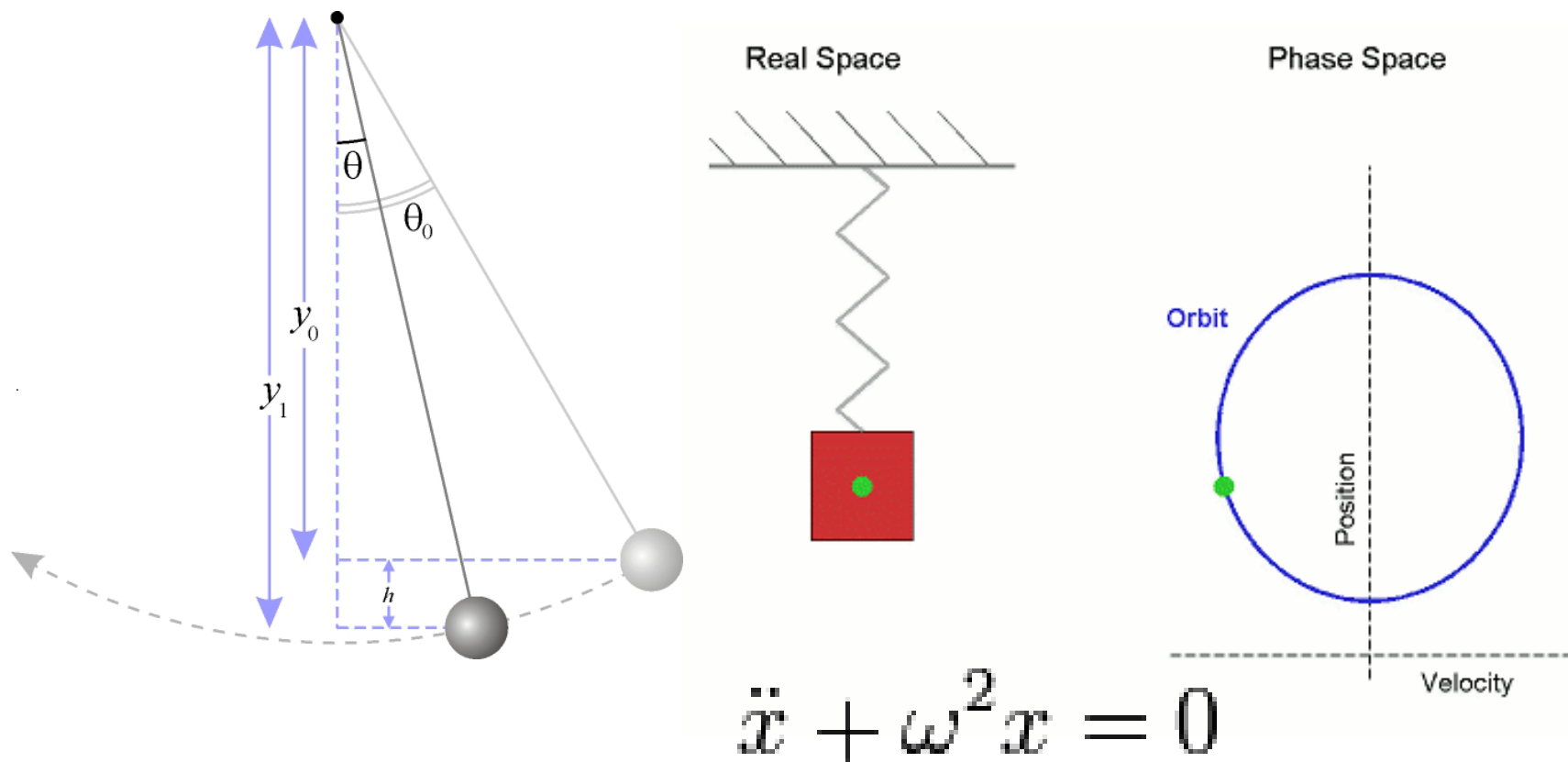


Без трения

С трением

Горка с краями

# Гармонический осциллятор



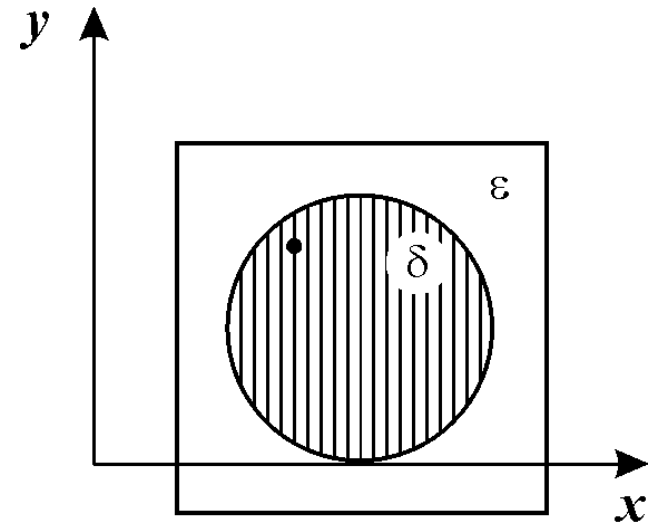
Физикам предлагается рассказать про гармонический осциллятор. Написать модель из двух уравнений (для положения и скорости) и сделать анализ фазового портрета. Рассмотреть трение. Моделью каких реальных физических систем может служить гармонический осциллятор?

Фазовая плоскость  
Качественное исследование

Анализ устойчивости  
стационарного состояния  
системы двух автономных  
дифференциальных  
уравнений

# Определение устойчивости

- Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия ( $\varepsilon$ ) можно указать область  $\delta(\varepsilon)$ , окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области  $\delta$ , никогда не достигнет границы  $\varepsilon$ .*



# Устойчивость стационарного состояния



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович ([1857](#) – 1918) – выдающийся русский [математик](#), создал [теорию устойчивости](#) состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области [дифференциальных уравнений](#), [гидродинамики](#), [теории вероятностей](#)

# Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

Разлагаем правые части в ряд Тейлора, оставляем первые члены

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

# Исследование устойчивости стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Ищем решение в виде:  $x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$

Нетривиальные  
решения существуют,  
если

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

Характеристический определитель

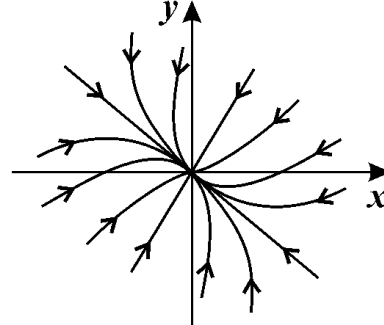


# Типы поведения фазовых траекторий вблизи стационарного состояния

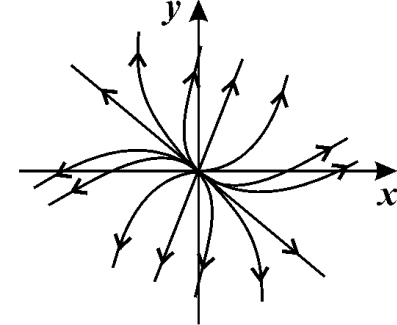
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

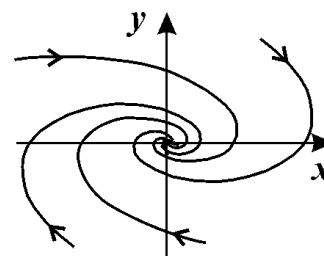
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



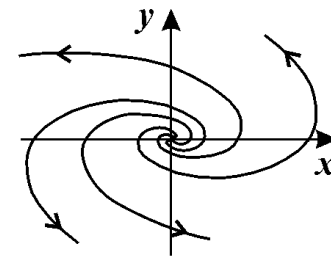
Устойчивый узел.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и отрицательны)



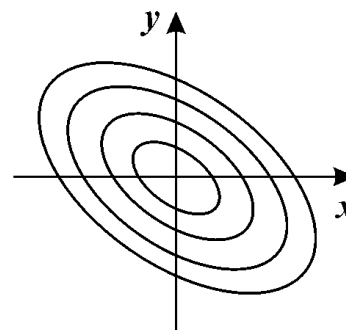
Неустойчивый узел.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и положительные)



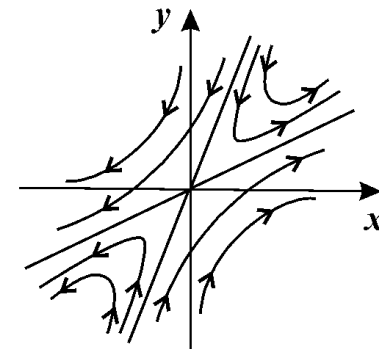
Устойчивый фокус  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексны,  
 $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ )



Неустойчивый фокус  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексны,  
 $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$ )



Центр.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - чисто мнимые)



Седло.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - действительны и разных знаков)

Если *оба корня* имеют **отрицательную действительную** часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия* **устойчиво**;

- если *хотя бы один корень* имеет **положительную действительную** часть, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия* **неустойчиво**.
- Если *действительные части* *обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, а *другой отрицателен*, то уравнения первого приближения *не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо рассматривать члены *более высокого порядка малости* в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений.

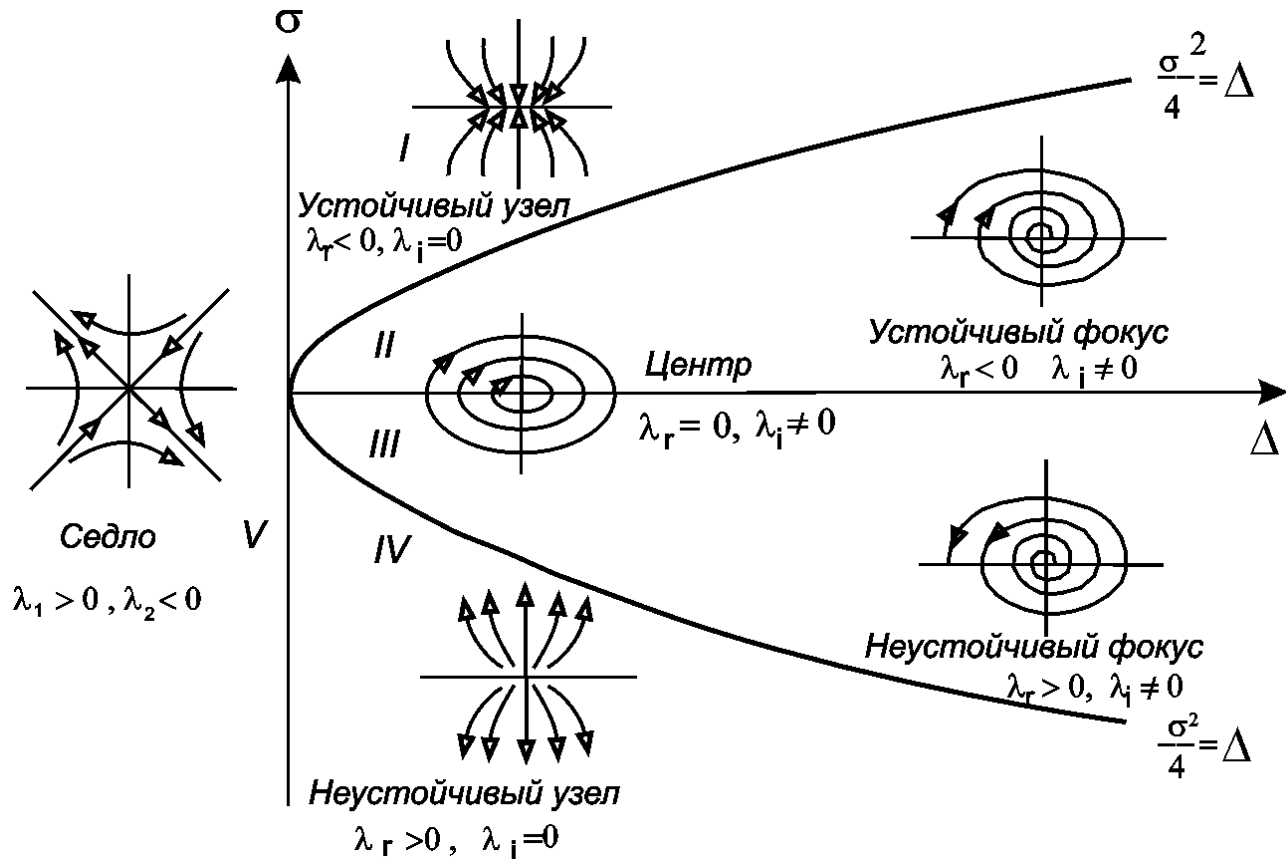
# Бифуркационная диаграмма

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

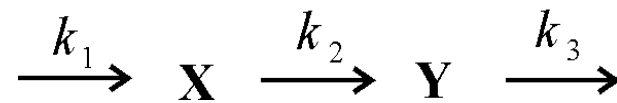
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



# Линейные химические реакции. Фазовый портрет



$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2x - k_3y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2x - k_3y}{k_1 - k_2x}$$

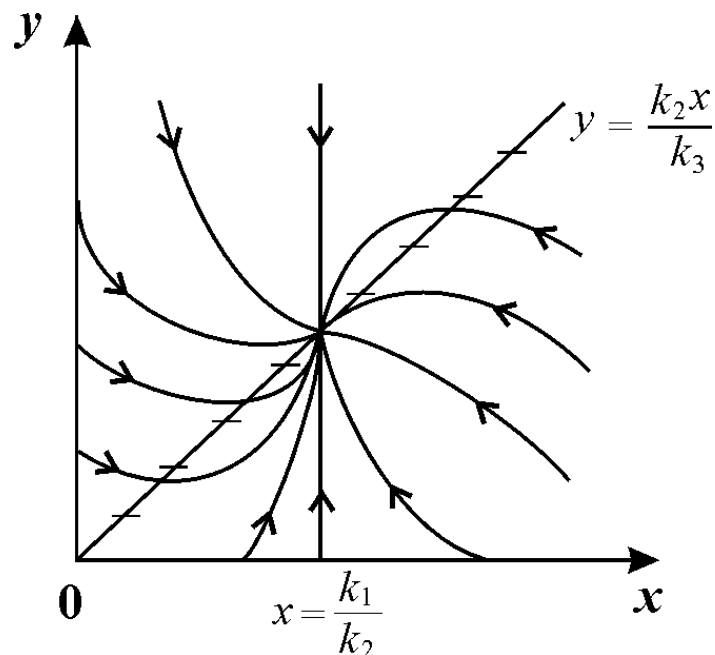
Изоклина горизонтальных касательных

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad y = \frac{k_2x}{k_3}.$$

Изоклина вертикальных касательных

$$\frac{dy}{dx} = \infty, \quad x = \frac{k_1}{k_2}.$$

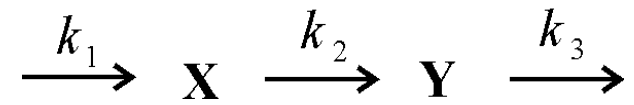
под каким углом пересекаются координатные оси интегральными кривыми.



Если  $x = 0$ , то  $\frac{dy}{dx} = -\frac{k_3}{k_1}y$

Если  $y = 0$ , то  $\frac{dy}{dx} = \frac{k_2x}{k_1 - k_2x}$

# Линейные химические реакции. Устойчивость стац. состояния



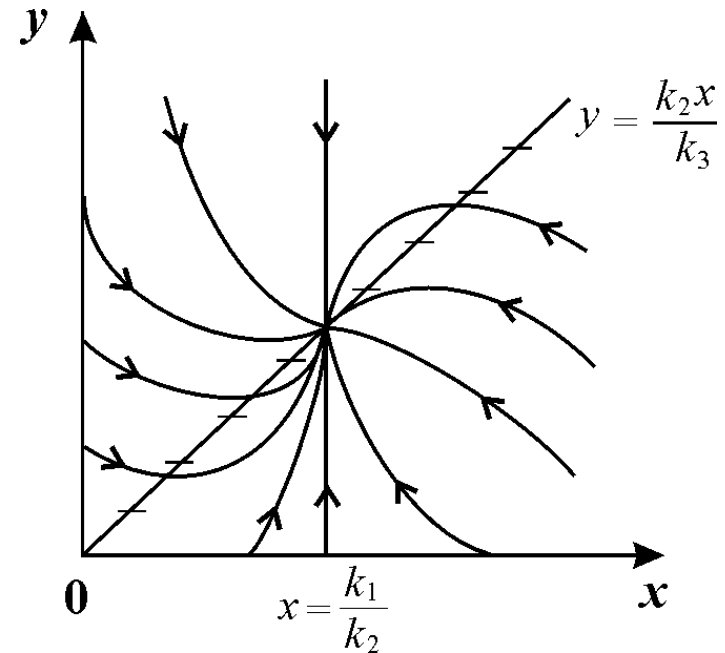
$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2x - k_3y.$$

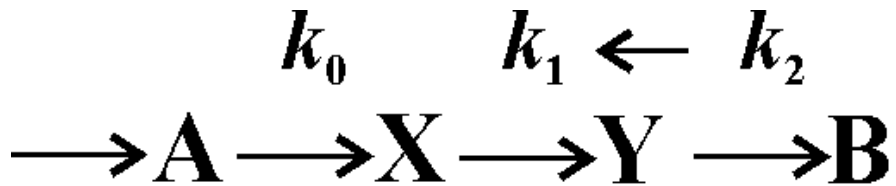
$$\begin{vmatrix} -k_2 - \lambda & 0 \\ k_2 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -k_2, \quad \lambda_2 = -k_3.$$



# Кинетические уравнения Лотки (А.Ж. Лотка. Elements of Physical Biology, 1925)



$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$
$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$



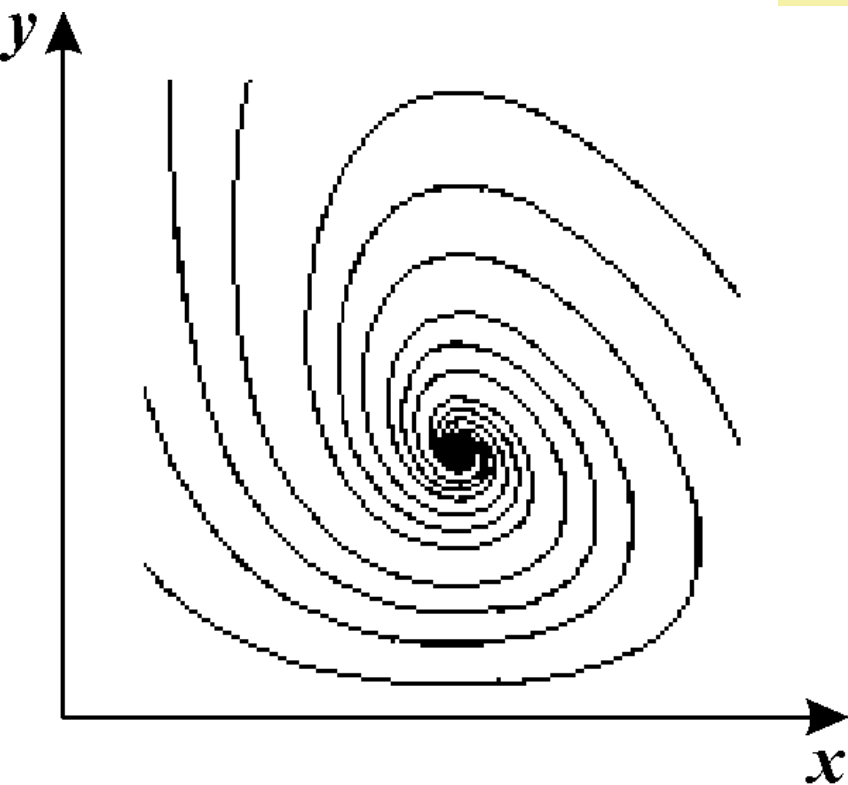
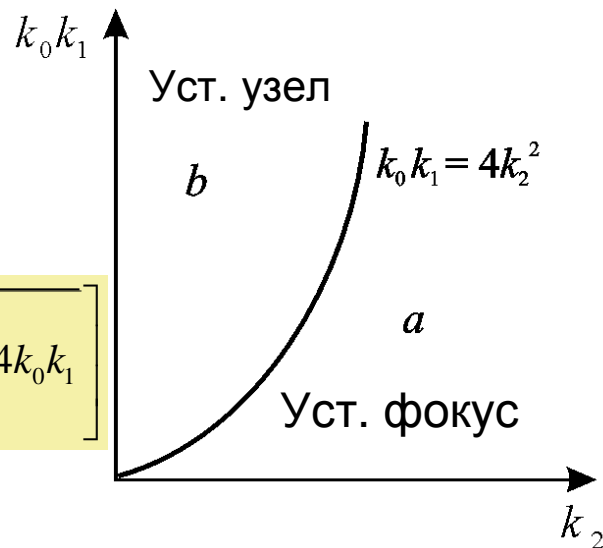
Лотка Альфред Джеймс ([англ. Alfred James Lotka](#)), [1880](#) –1949 – [американский математик](#), физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Фазовый портрет системы Лотки  
*a* – устойчивый фокус,  
*б* – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy,$$

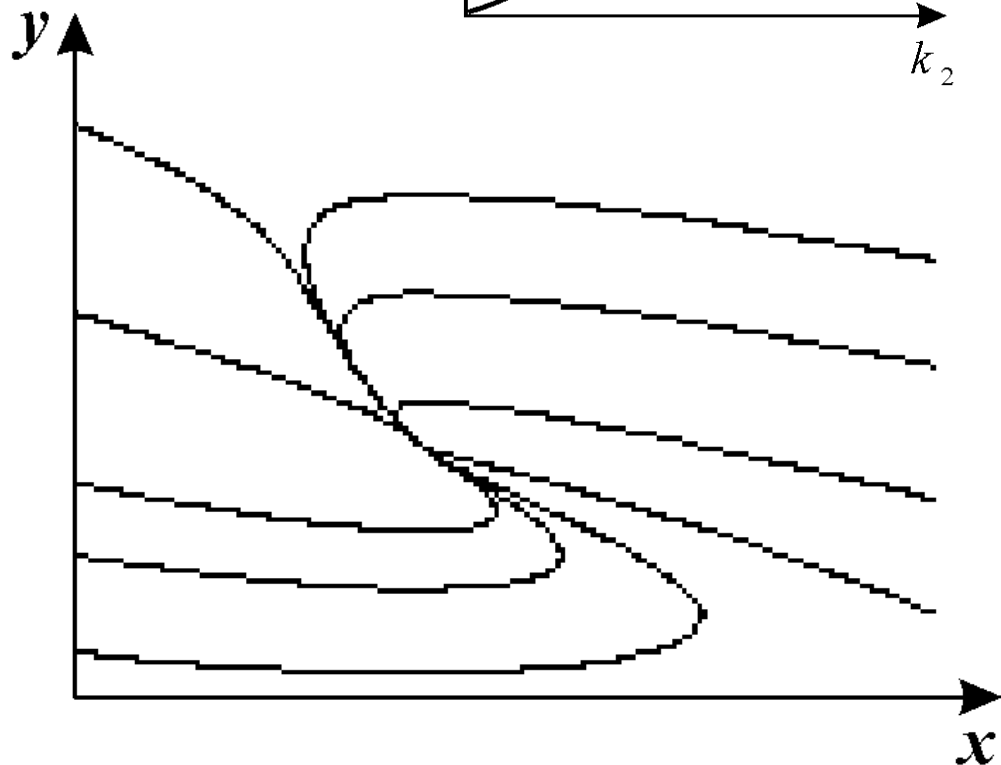
$$\frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{k_1k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0k_1} \right]$$



*a*

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



*б*

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

# Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

X – численность жертв

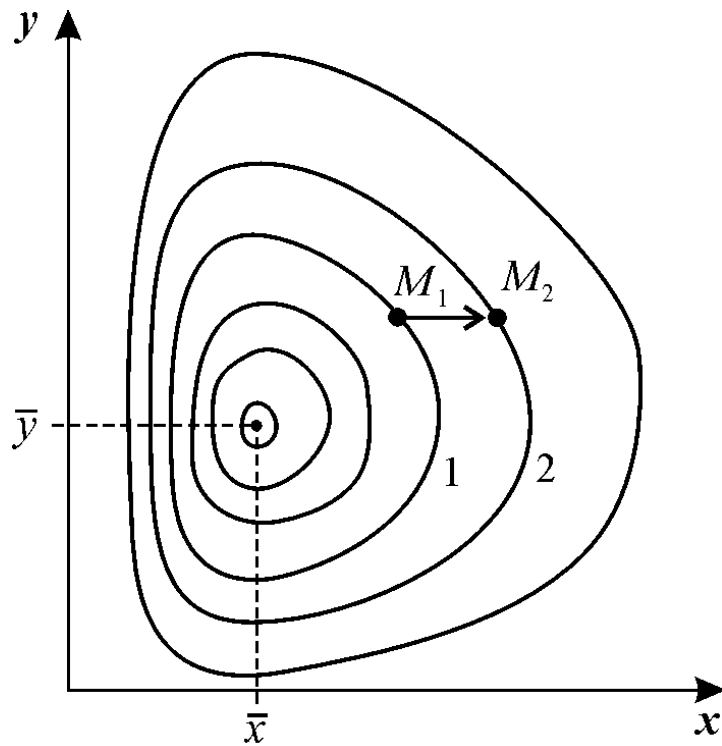
Y – численность хищников



**Вольтерра Вито** ([1860](#) — [1940](#)) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

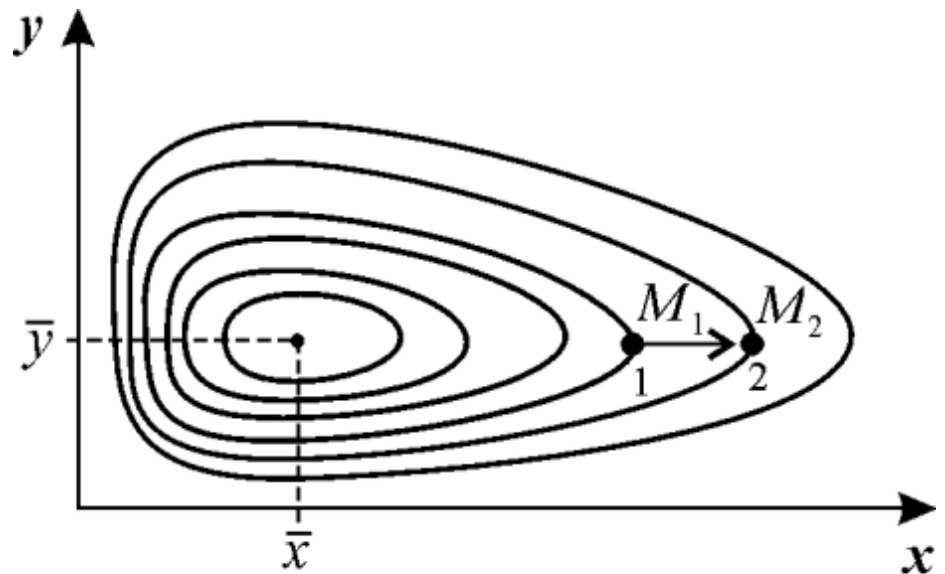


# Фазовый портрет модели Вольтерра



*a*

$$\varepsilon x = 4, \gamma xy = 0,3, \varepsilon y = \gamma yx = 0,4$$



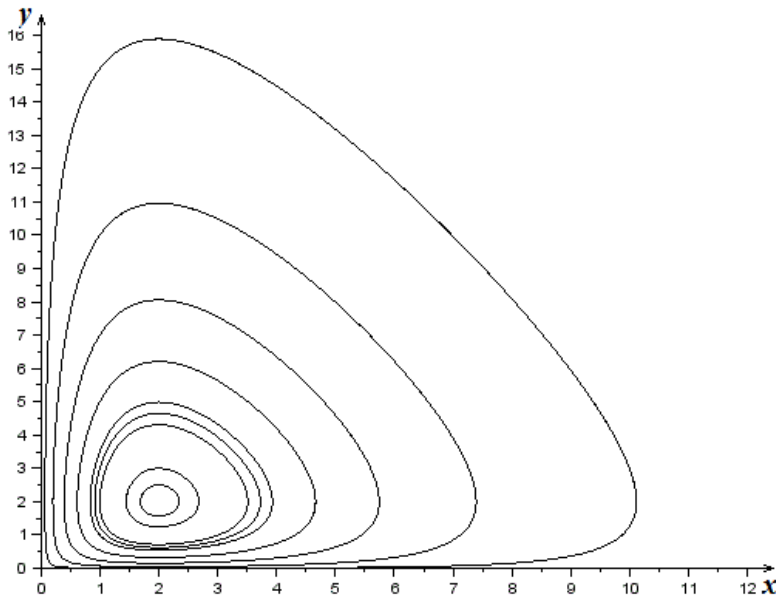
*б*

$$\varepsilon x = 2, \gamma xy = 0,3, \varepsilon y = \gamma yx = 0,4$$

Volterra predator–prey model  
describing continuous oscillations of  
the population numbers.

(a) phase pattern;

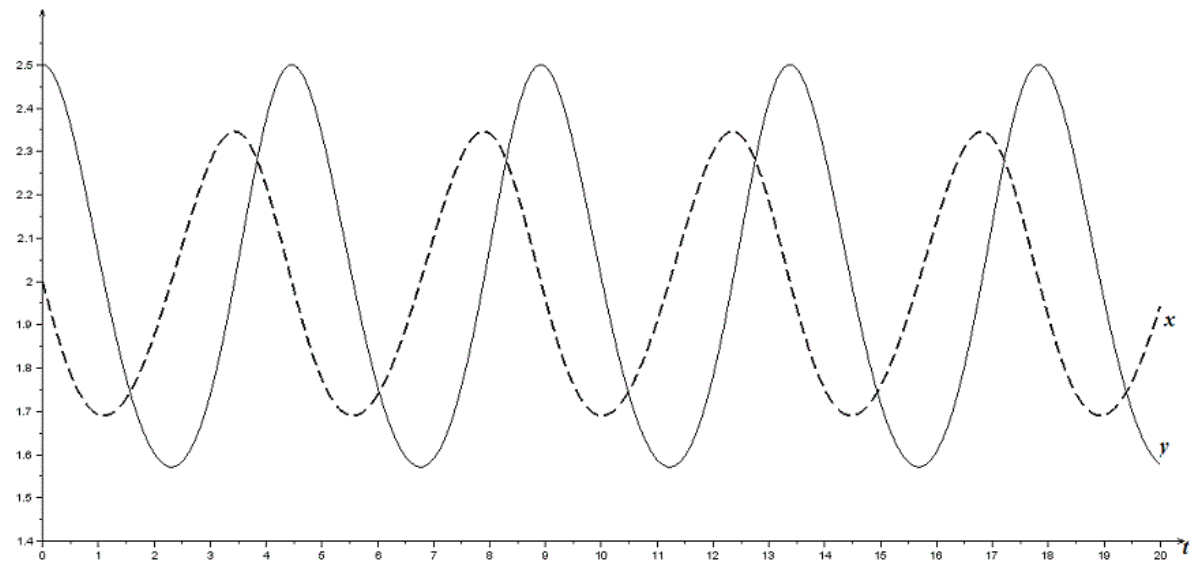
(b) dependence of the numbers  
of predators and preys on time.



$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

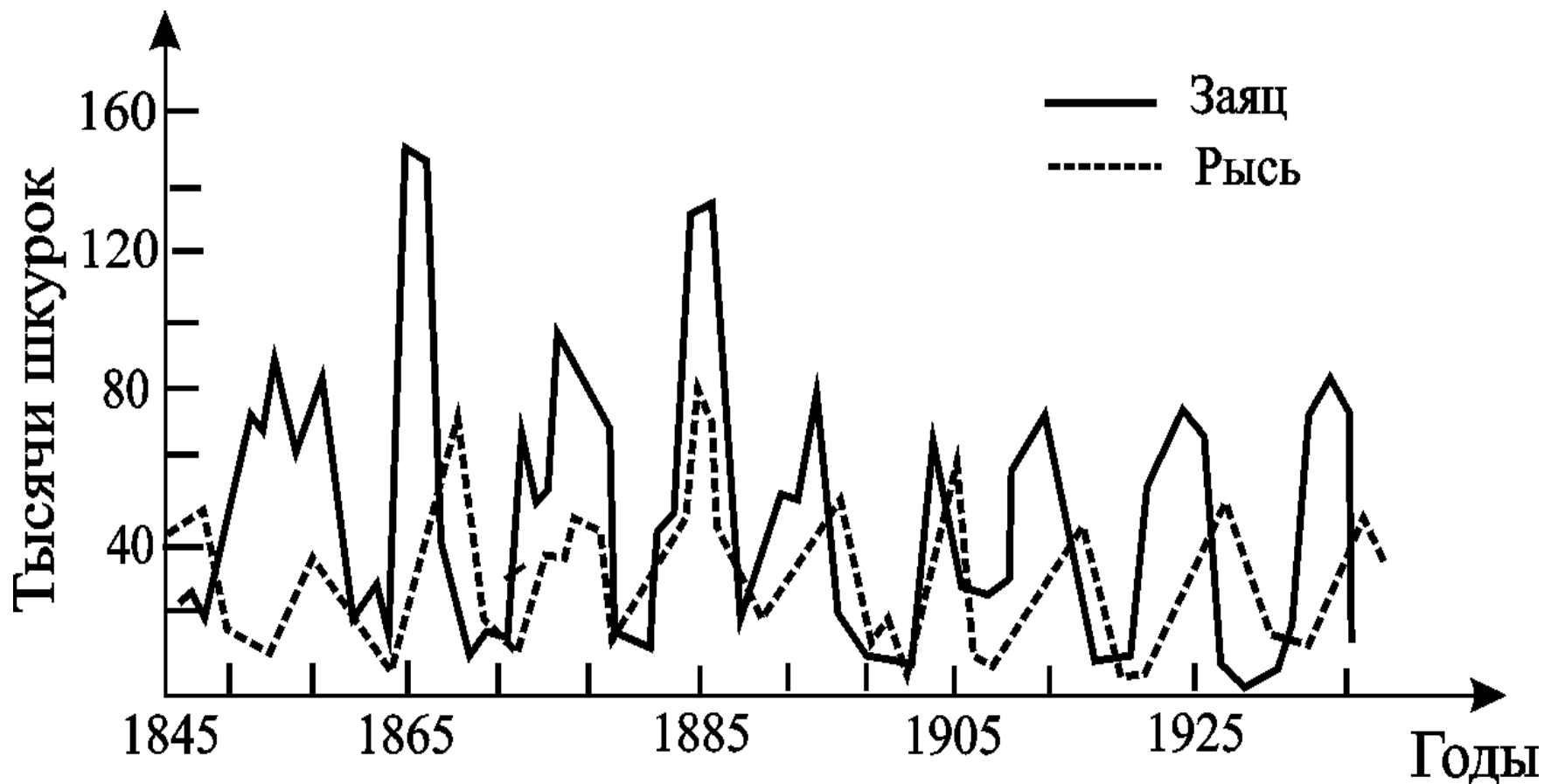
$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



# Кривые численности зайца и рыси в Канаде

(по К. Вилли, В. Детье, 1974)

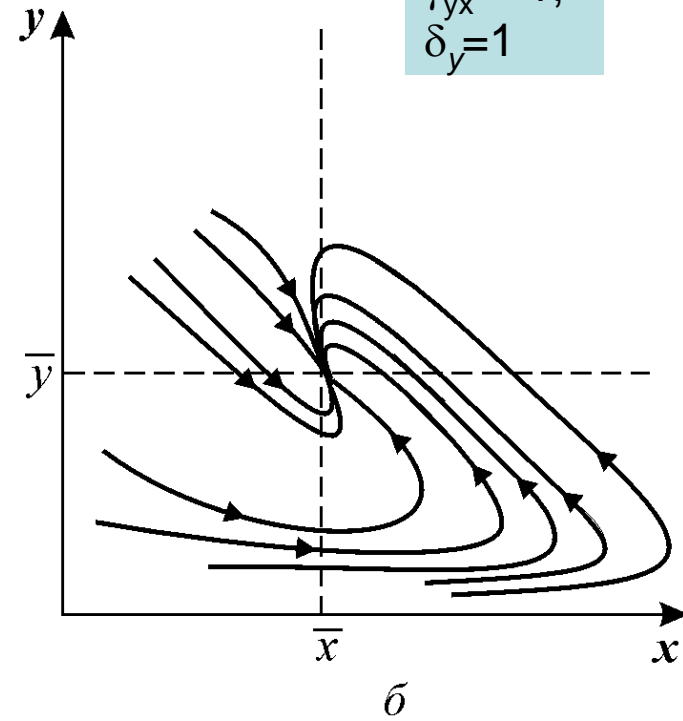
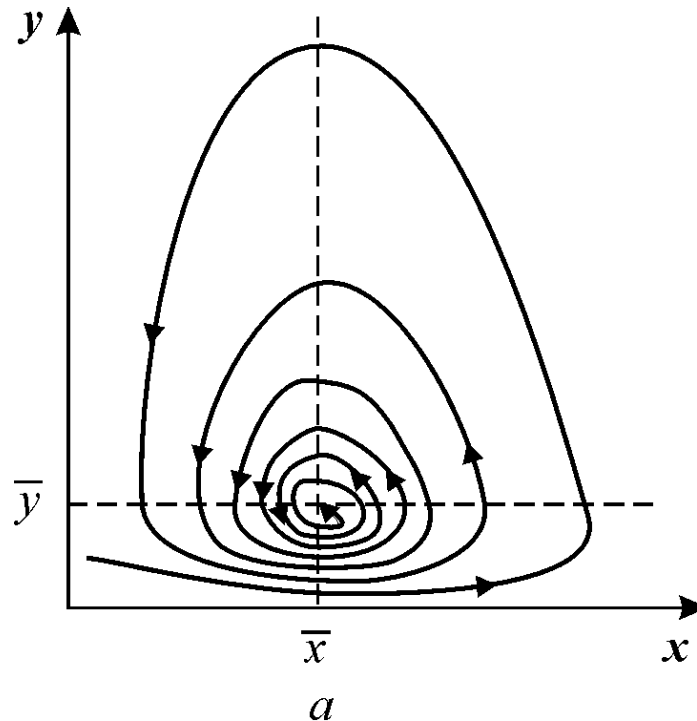


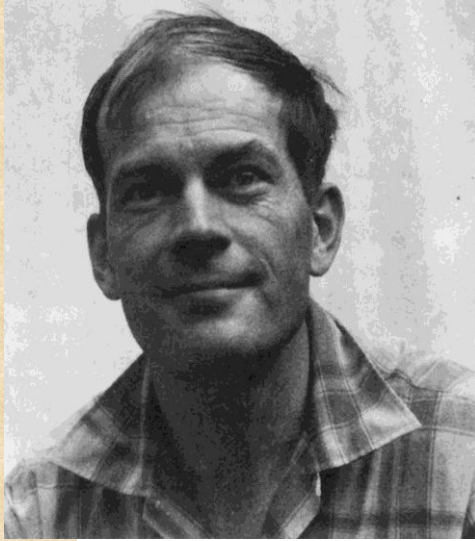
# Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 1, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 1, \\ \delta_y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 18, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 5, \\ \delta_y &= 1 \end{aligned}$$



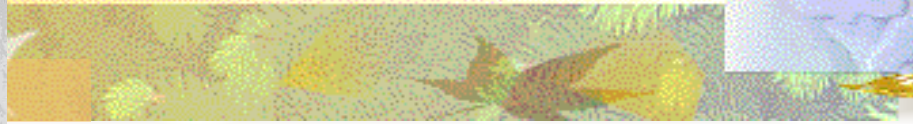


**МакАртур**

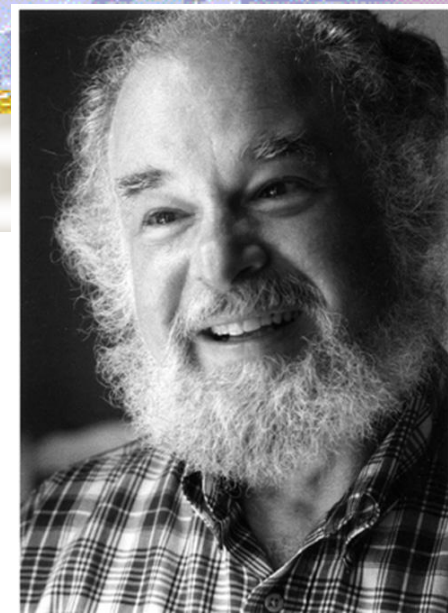
**Роберт**

(MacArthur Robert,  
1930-1972)

Американский  
биолог, эколог.  
Работы по  
динамике  
популяций и  
разнообразию  
экологических  
сообществ



# Модель Розенцвейга- Макартура (1965)



**Розенцвейг**  
**Майкл Л.**  
(Rosenzweig  
Michael L.)

Профессор.  
Университета  
Аризона, США  
основатель и  
главный редактор  
журнала  
“Evolutionary  
Ecology” (с 1986)

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - yL(x),$$
$$\frac{dy}{dt} = -ey + kyL(x).$$



## А.Д. БАЗЫКИН

Биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985;

Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М., ИКИ, 2003

Nonlinear dynamics of interacting populations. World Scientific. 1998

Nonlinear dynamics of interacting populations. World Scientific. 1998

Александр Дмитриевич

Базыкин

1940-1954

Российский биолог и биофизик

Работы по динамике популяций

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \frac{Bxy}{1 + px} - Ex^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + \frac{Dxy}{1 + px} - My^2.$$

Набор фазовых  
портретов  
системы  
возможных в  
конечной части  
первого квадранта  
и  
соответствующих  
областям 1 - 10  
параметрического  
портрета

(Базыкин, 1985)



Фазовые портреты изображены в положительном двуугольнике сферы Пуанкаре. Бесконечность отображается на внутренность сферы конечного радиуса