

# Модели нелинейного мира

[www.biophys.msu.ru](http://www.biophys.msu.ru)

**Галина Юрьевна Ризниченко**

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского  
государственного университета им. М.В.Ломоносова,  
к.119

тел: +7(095)9390289; факс: (095)9391115;

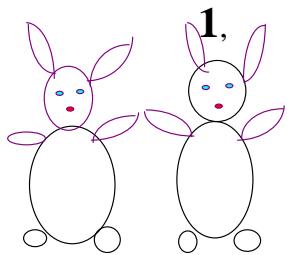
E-mail: [riznich@biophys.msu.ru](mailto:riznich@biophys.msu.ru)

Лекция 3

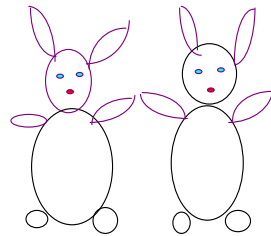
<http://mathbio.ru/lectures>



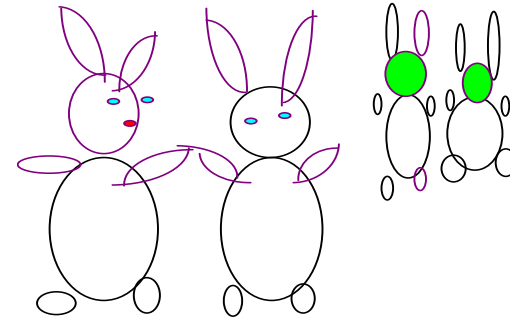
# Популяционная динамика ряд Фибоначчи



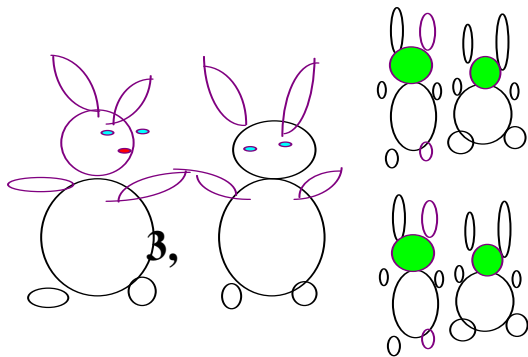
1



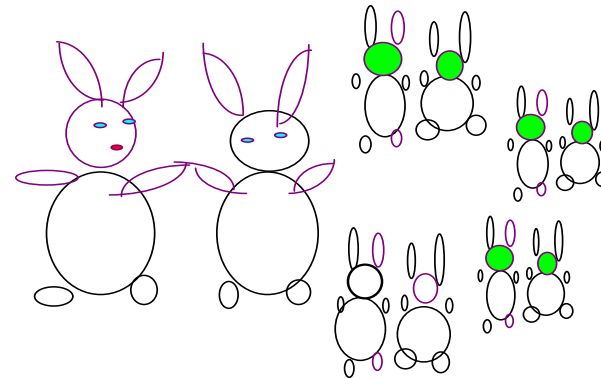
1



2



3



5

Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

# Непрерывные модели роста популяций

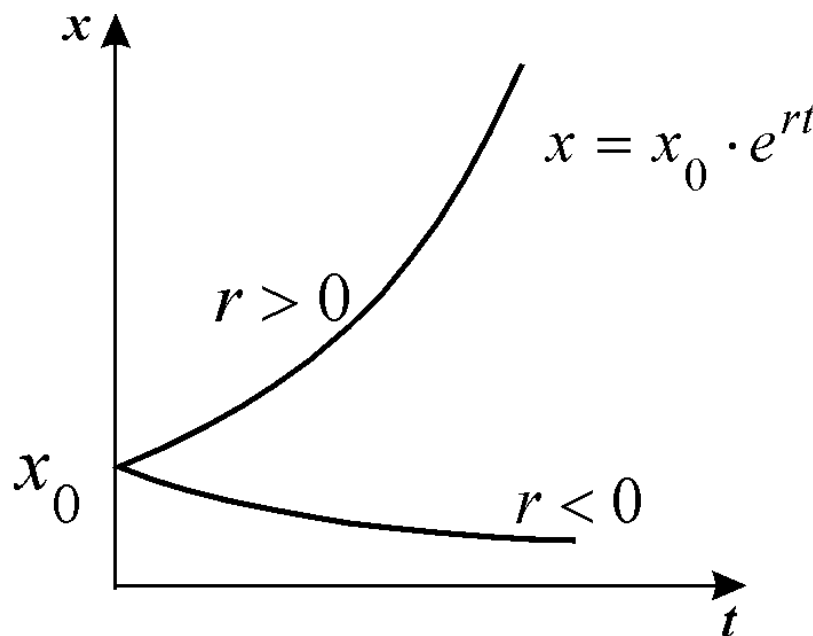
# Модель экспоненциального роста Мальтуса («О росте народонаселения» 1798)



Тóмас Рóберт  
Мáльтус  
английский  
священник  
демограф и  
экономист  
1766-1834

$$N_{t+1} = qN_t \quad N_{t+1} = q^n N_0$$

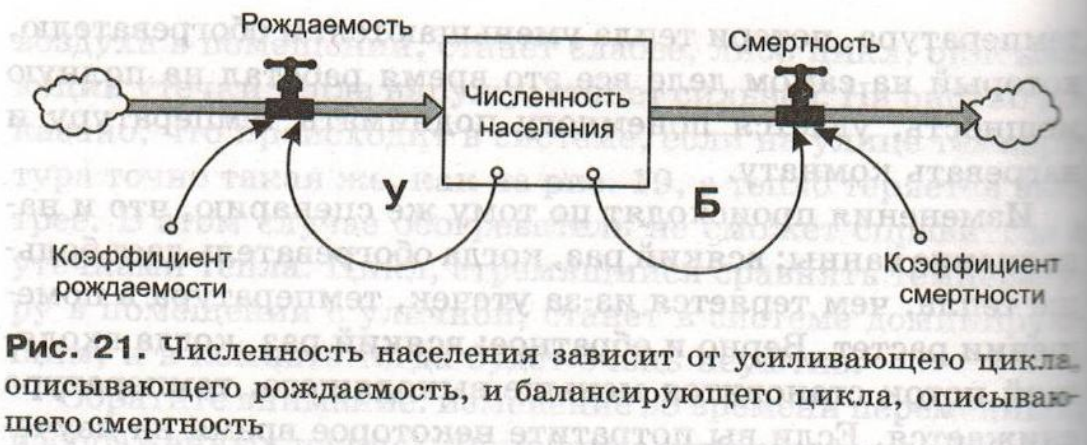
$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



# Схемы роста в терминах системного анализа

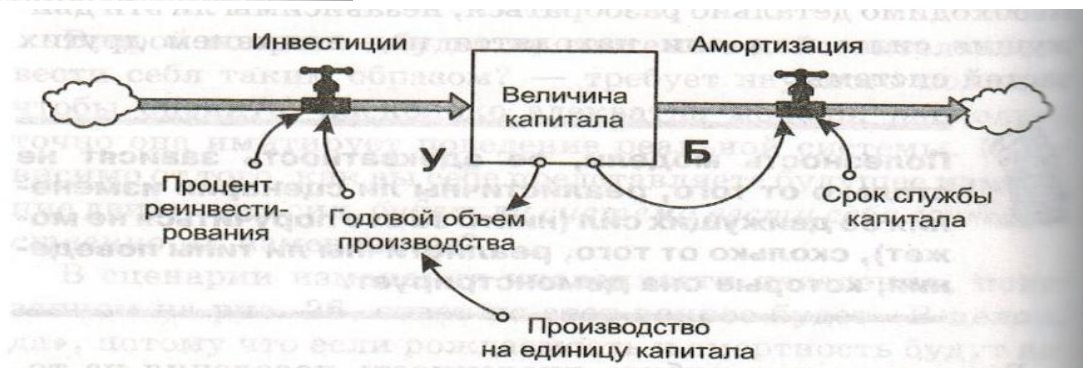
80

Часть I. Системные структуры и поведение



**Рис. 21.** Численность населения зависит от усиливающего цикла, описывающего рождаемость, и балансирующего цикла, описывающего смертность

Чем больше величина физического капитала (оборудование и заводы) и чем выше эффективность производства (объем производства на единицу капитала), тем больше годовой выход продукции



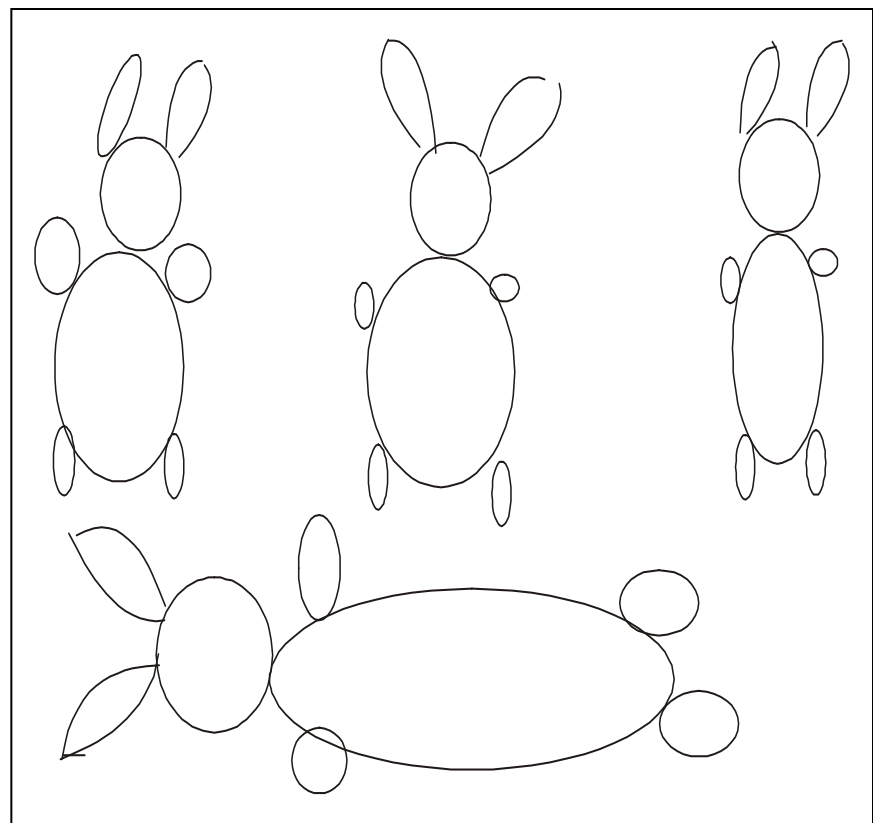
**Рис. 27.** Как и в структуре с численностью населения, экономический капитал зависит от усиливающего цикла, ответственного за рост (инвестиции в виде доли от годового объема производства), и балансирующего цикла, ответственного за снижение капитала (амортизация)

Уравнение  
логистического  
роста (Ферхюльст, 1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$r$  – константа скорости роста

$K$  – емкость экологической ниши



$K$  – системный фактор

# Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

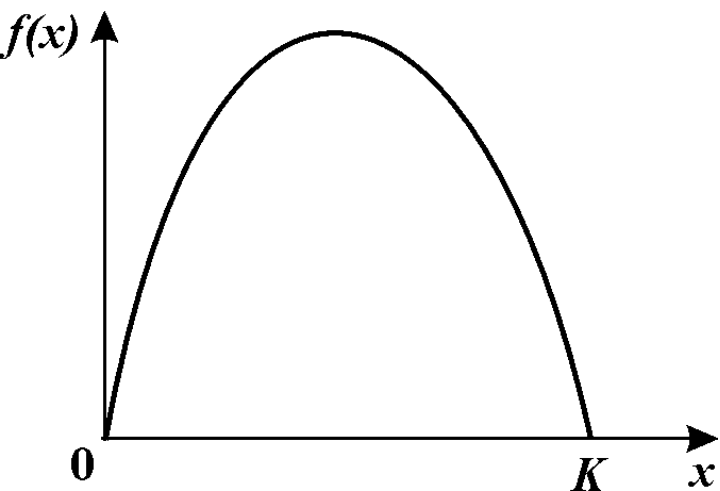
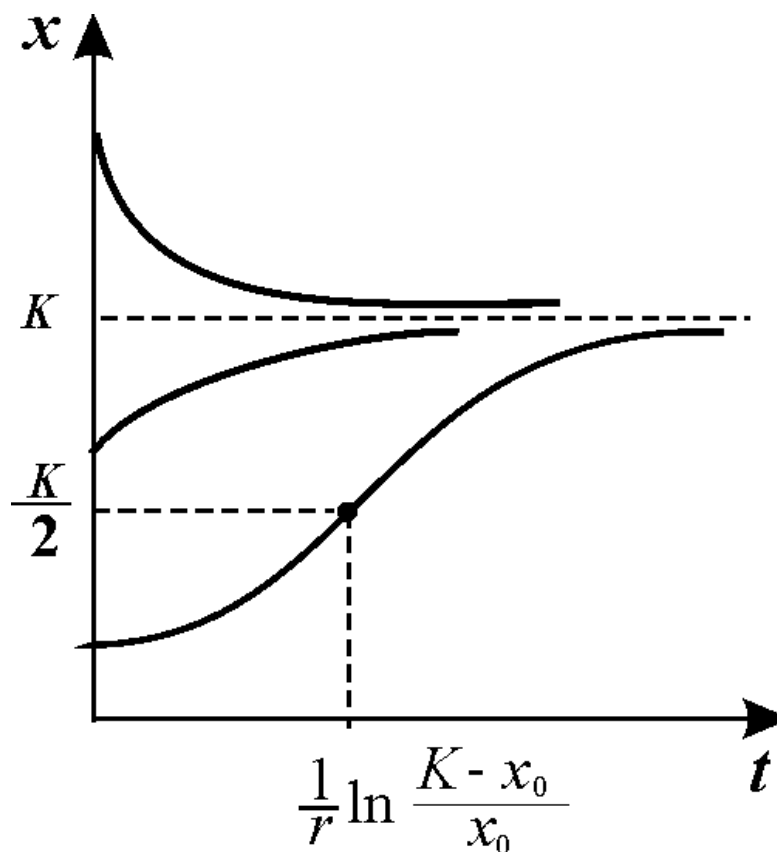


График функции  $f(x)$

Задание математикам и физикам

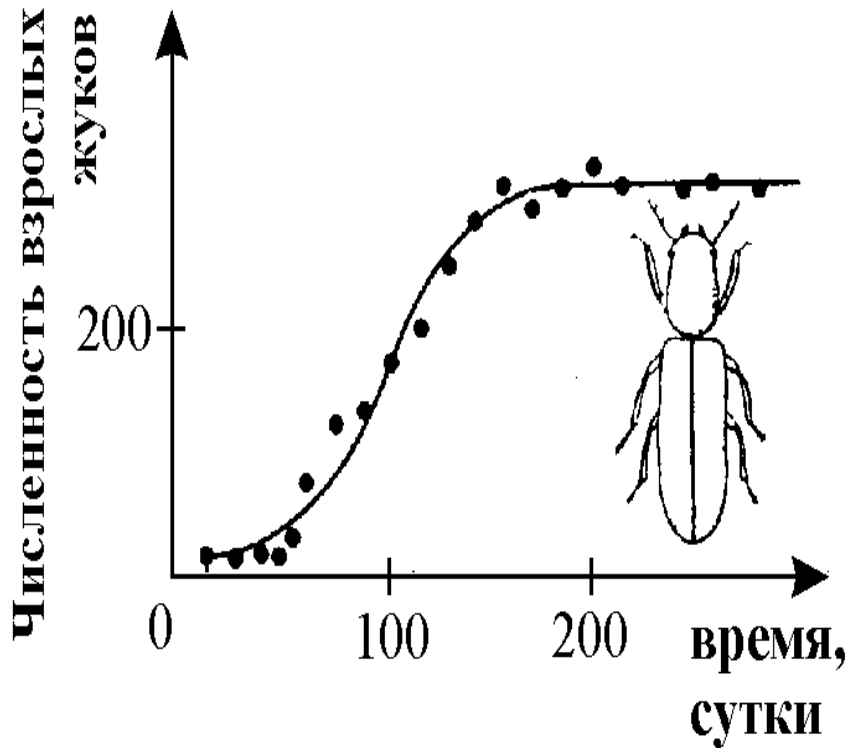
1. Решить уравнение Ферхюльста При заданном  $x_0$ .
2. Найти координаты точки перегиба



Поведение  $x$  во времени

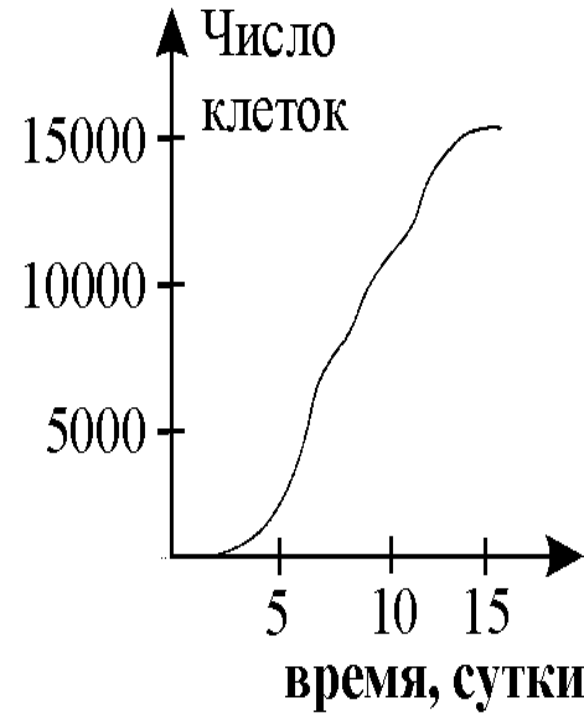
# Ограниченный рост (уравнения Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$



*a*

Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).



*б*

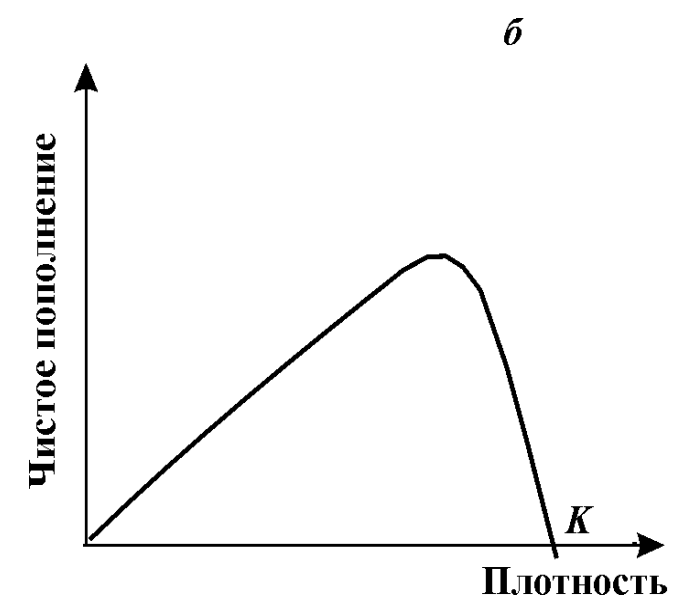
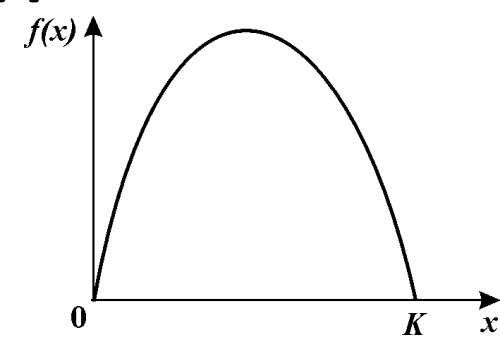
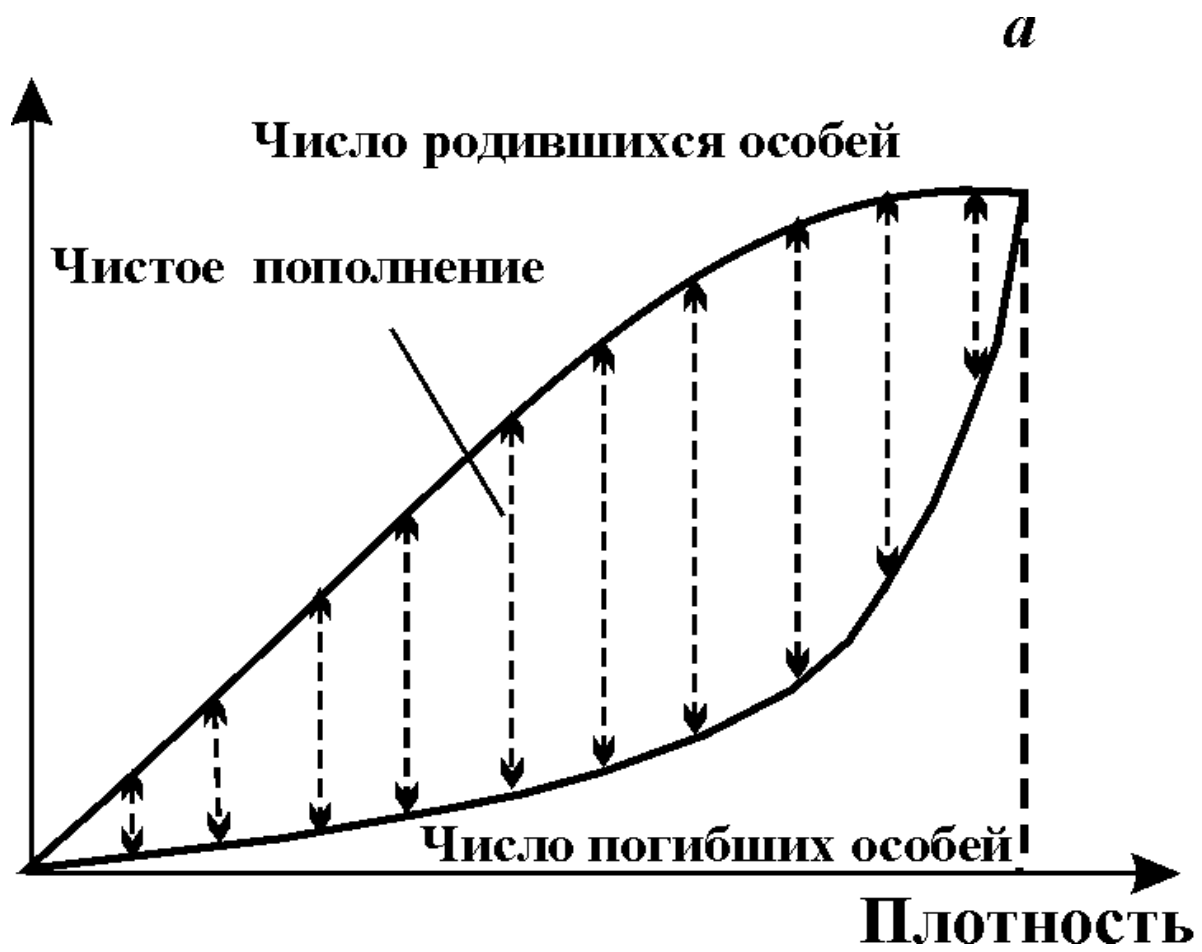
Водоросль *Chlorella* в культуре

(Pearsall, Bengry, 1940)

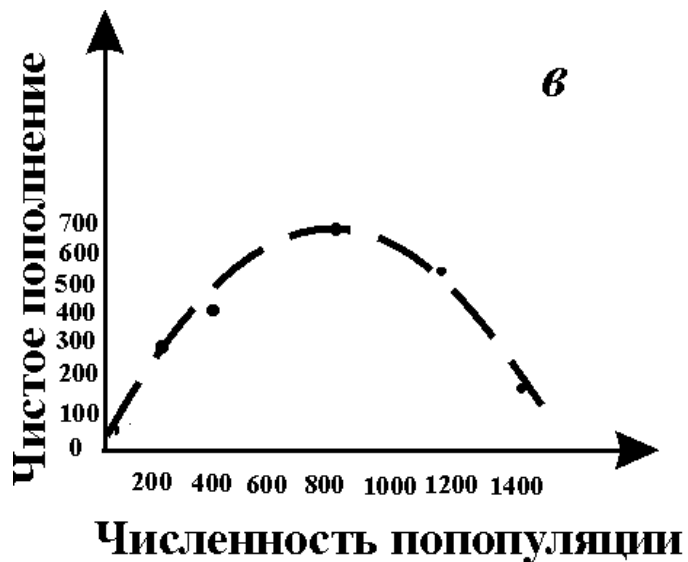


$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

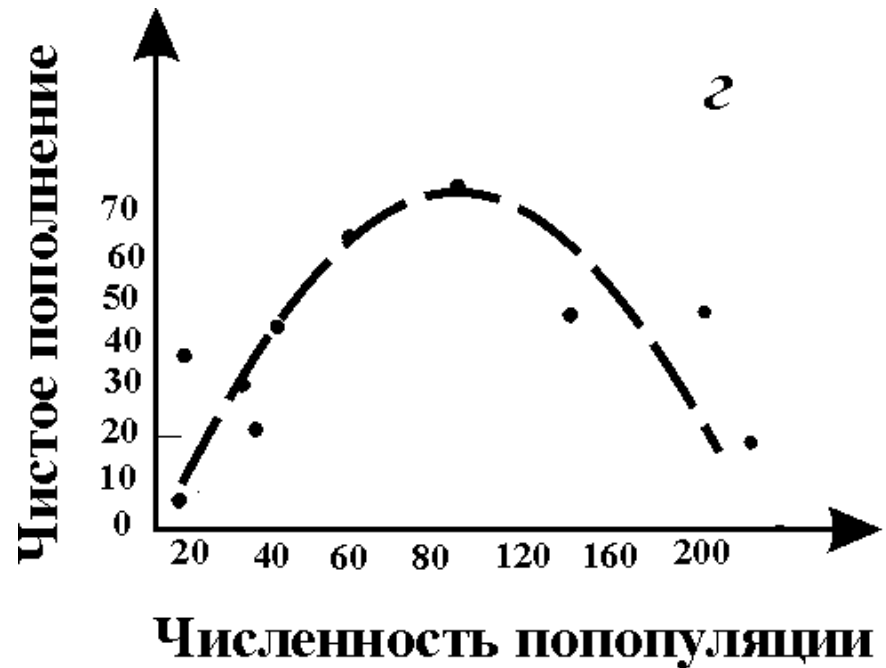
# Кривые пополнения



# Примеры кривых пополнения (1)

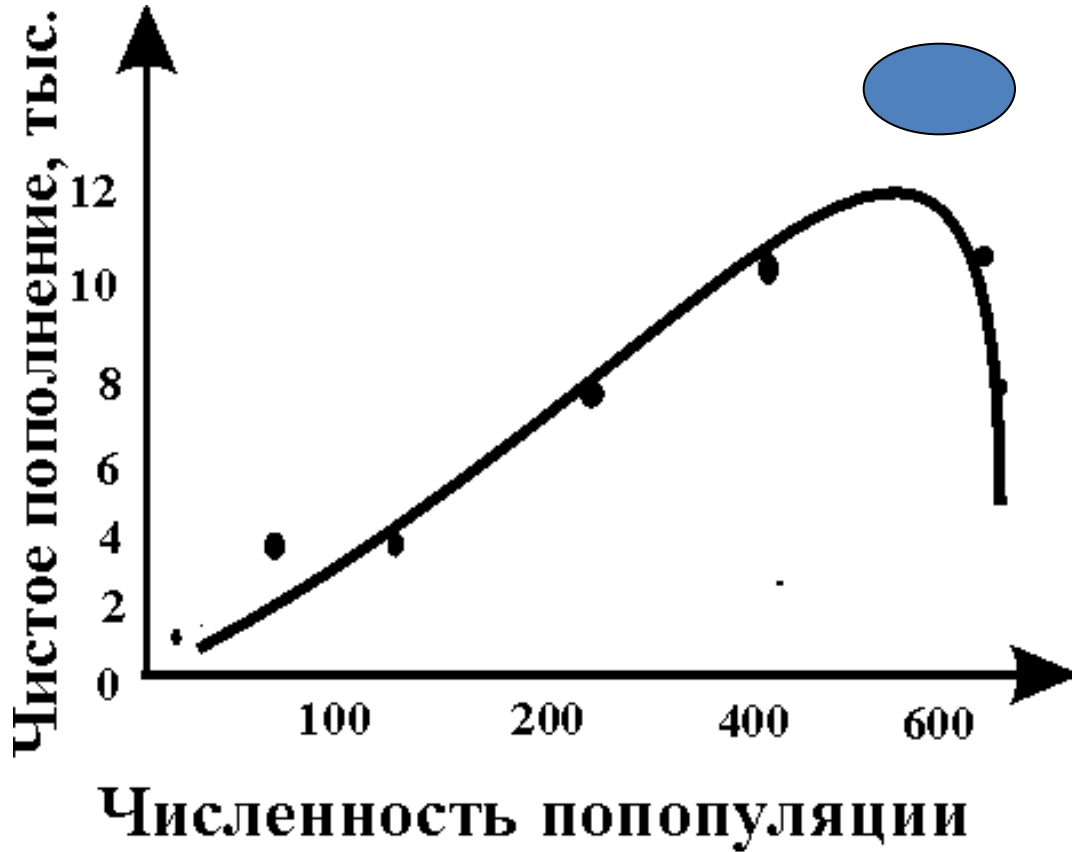


численность фазана обыкновенного  
на о. Протекшн - Айленд  
после его интродукции в 1937 г.  
(Einarsen, 1945);



экспериментальная популяция  
плодовой мушки *Drosophyla*  
*melanogaster* (Pearl, 1927)

# Примеры кривых пополнения (3)

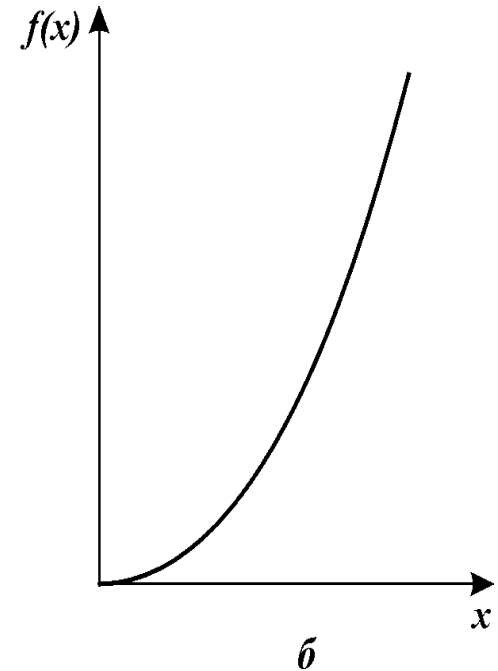
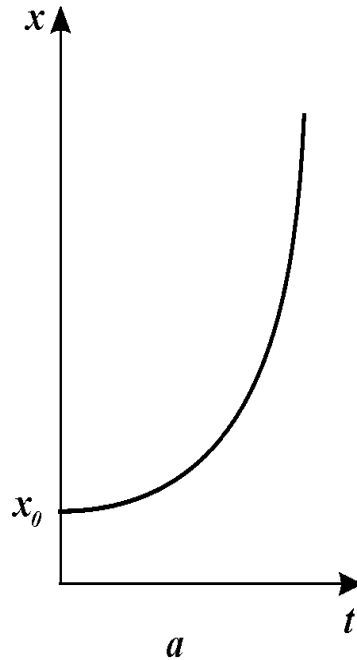


оценка  
численности  
*арктического*  
*финвала*  
(Allen, 1972)

# Учет двуполого размножения

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$

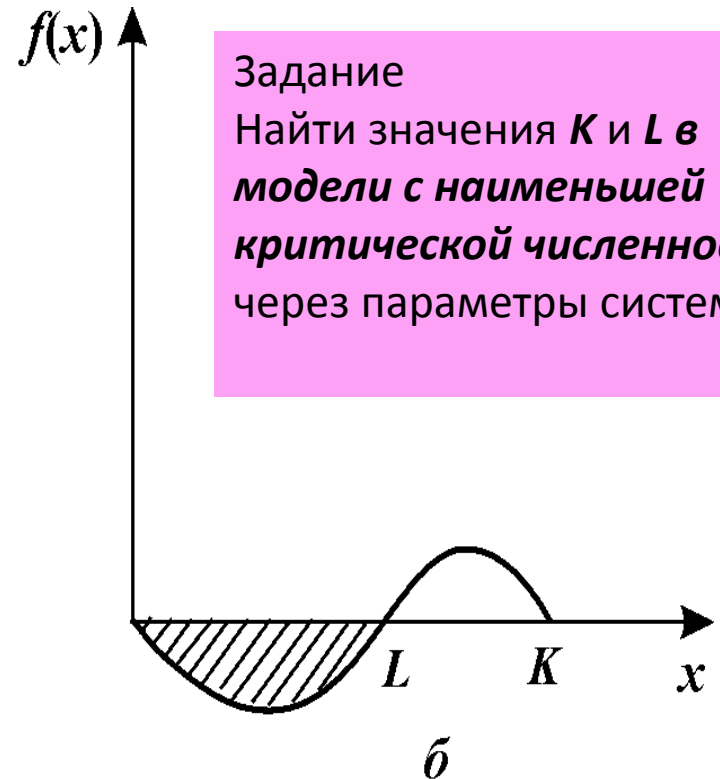
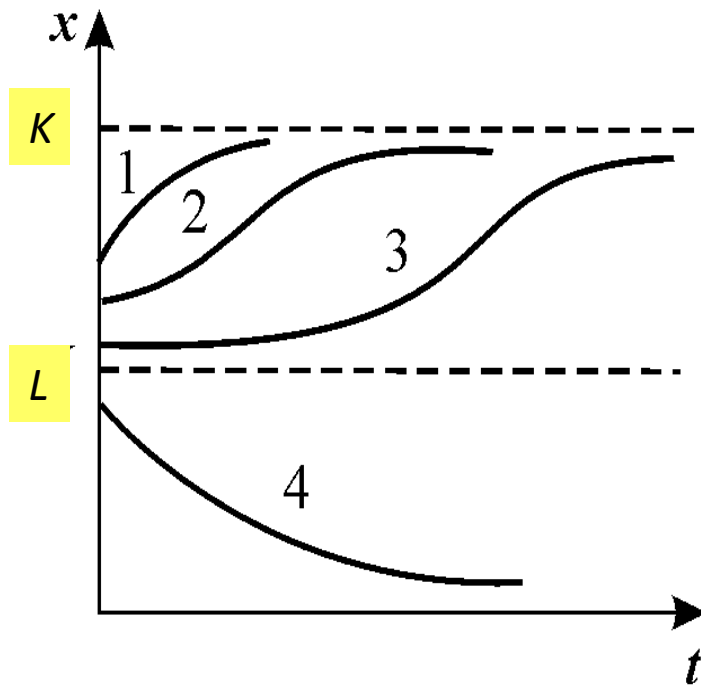


При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.

При высоких – числу самок в популяции.

Задание математикам и физикам  
Решить уравнения двуполого размножения

# Наименьшая критическая численность



Задание  
Найти значения  $K$  и  $L$  в модели с наименьшей критической численностью через параметры системы

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

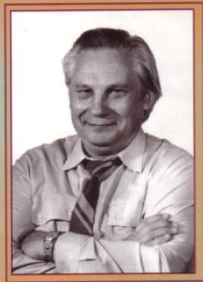
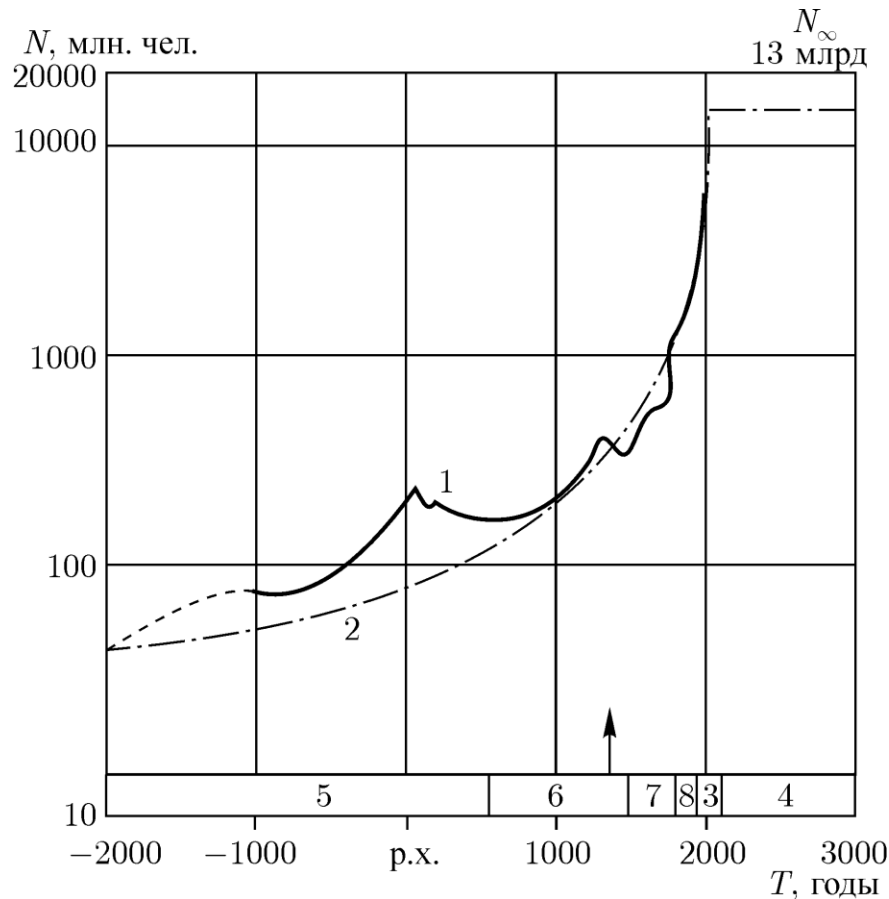


Сергей Петрович Капица  
(1928-2012)

Общая теория  
роста человечества 1999

Г.Ю.Ризниченко  
А.Б.Рубин  
Биофизическая динамика  
продукционных процессов  
2004. Глава 8

## Динамика численности человечества



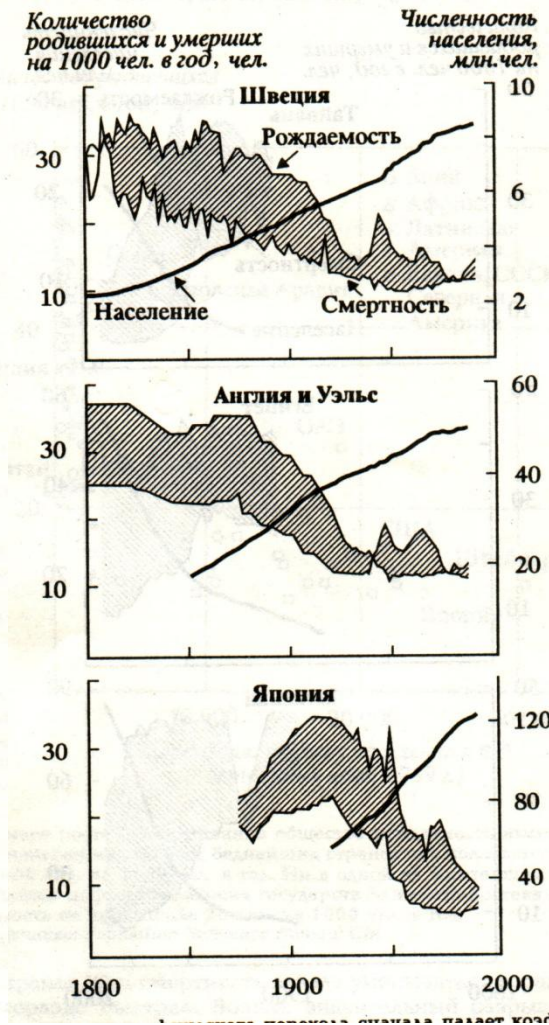
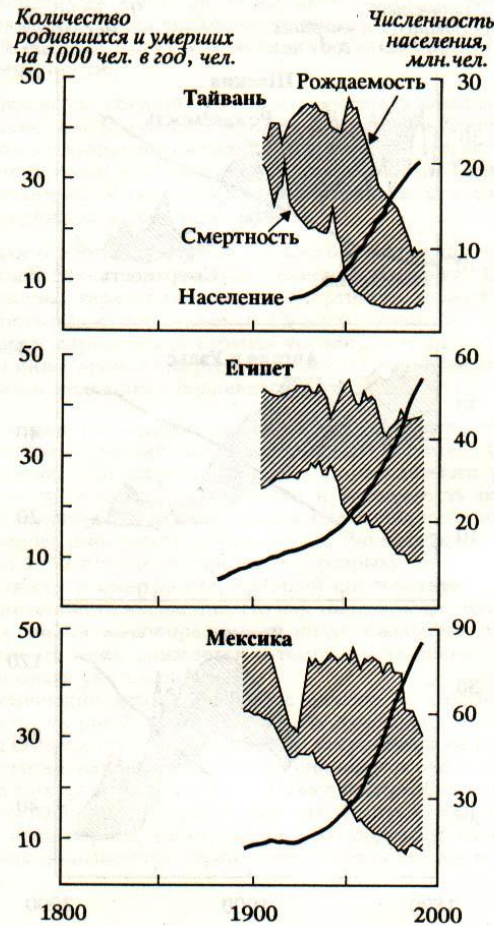
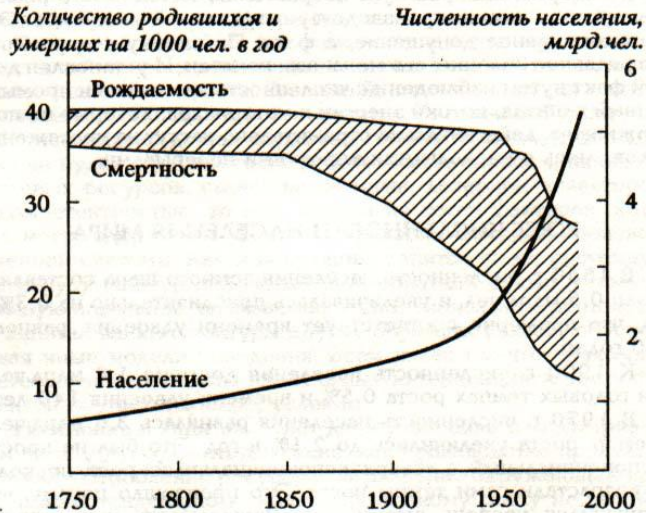
С.П. КУРДЮМОВ

РЕЖИМЫ  
С ОБОСТРЕНИЕМ  
ЭВОЛЮЦИЯ  
ИДЕИ

Сергей  
Павлович  
Курдюмов  
1929-2004

Тема для  
реферата

# Прирост численности населения (пополнение)



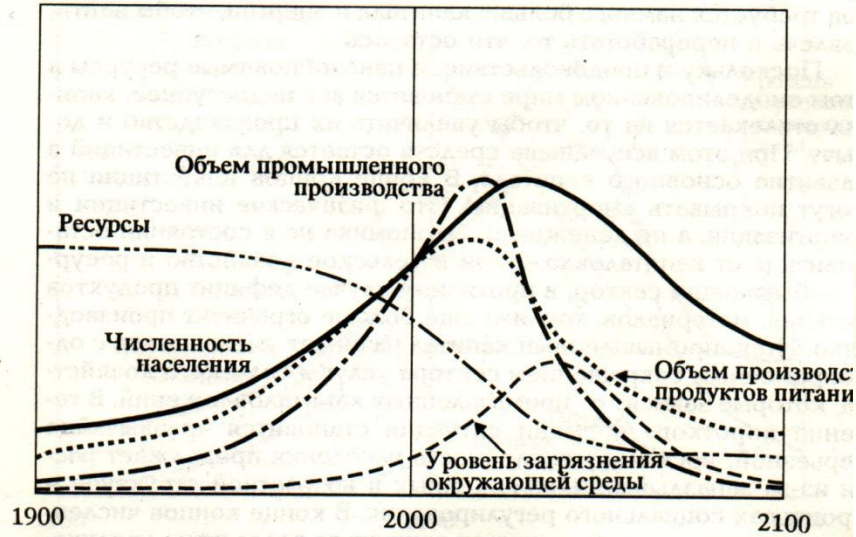
# Модель глобального роста

- Невозможно решить проблему на том уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень
- Альберт Эйнштейн
- Forrester J.W. World dynamics. 1971
- Форрестер Дж. Мировая динамика. М., Наука, 1978
- Meadows D.U. et al. The dynamics of the growth in a finite world. 1974
- Meadows D. et al., The limits to growth. 1972
- Медоуз и др., Пределы роста, изд. МГУ, 1991
  - За пределами роста 1994
  - Пределы роста 30 лет спустя. 2008

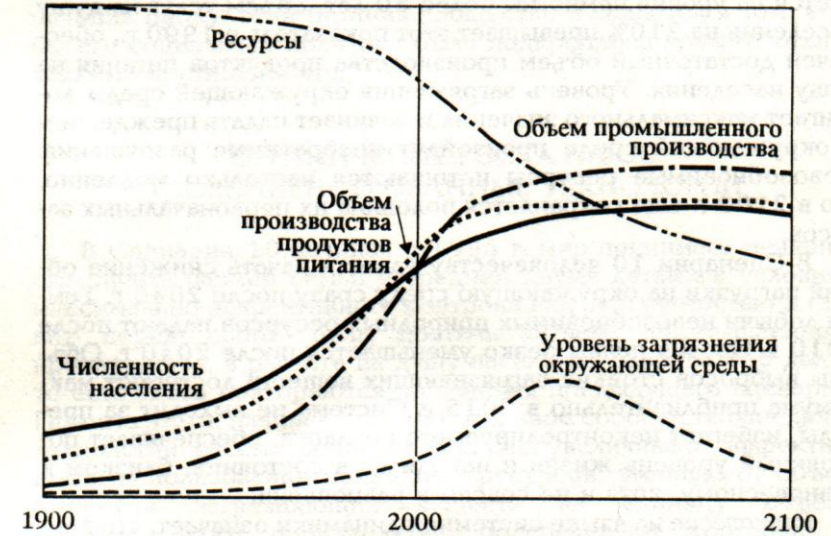


# Принятие мер в 1995 году

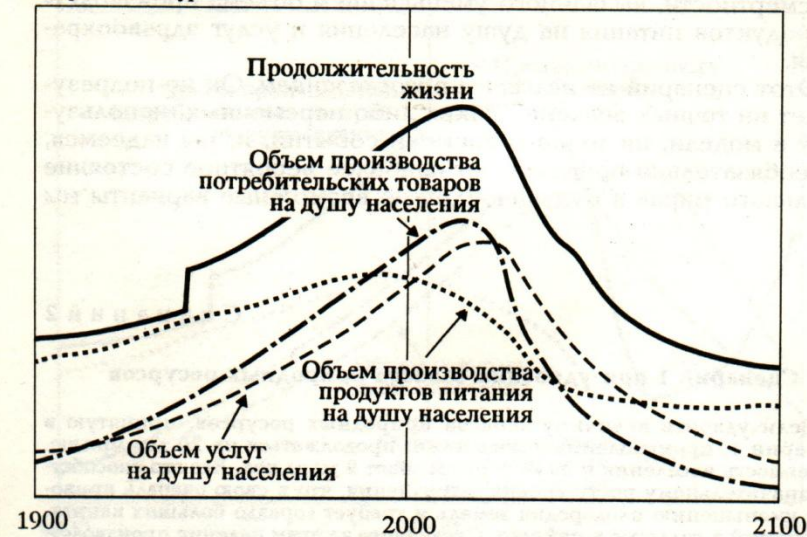
Состояние мира



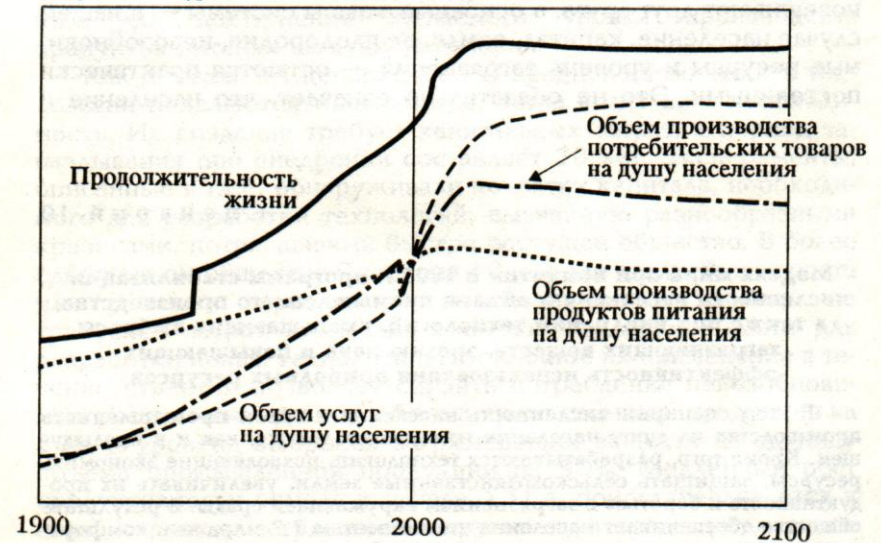
Состояние мира



Материальный уровень жизни



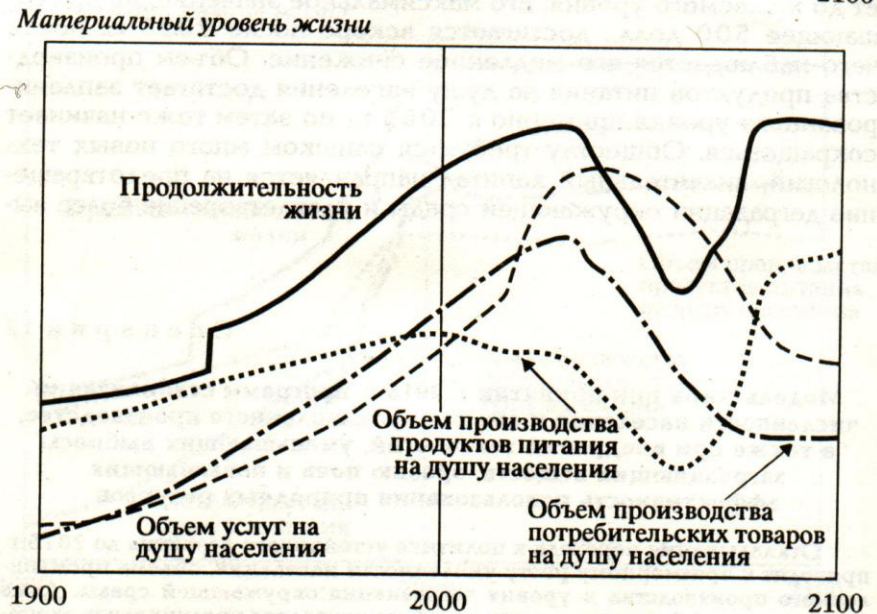
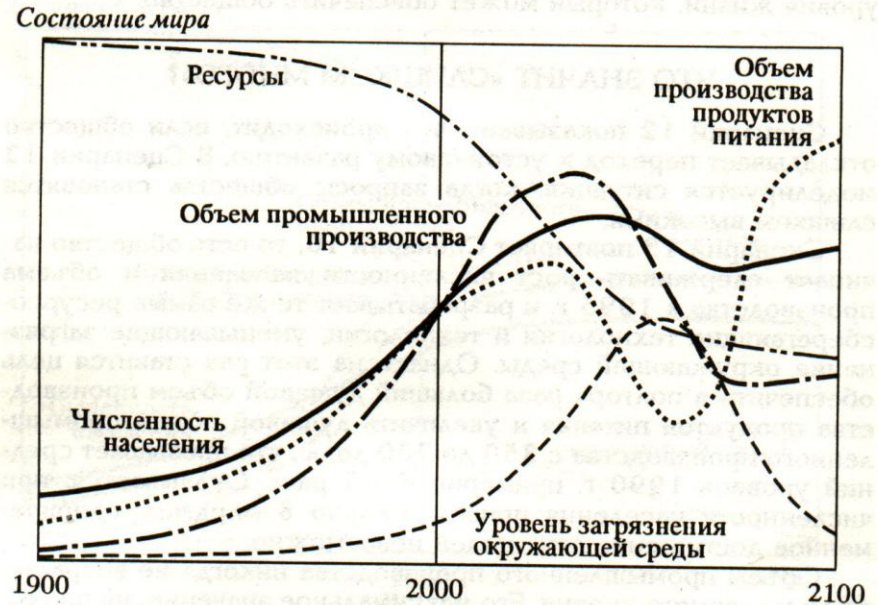
Материальный уровень жизни



# Принятие мер в 2015 году

Запаздывание в принятии мер предотвращения кризиса

Тема для реферата  
Современная глобальная динамика





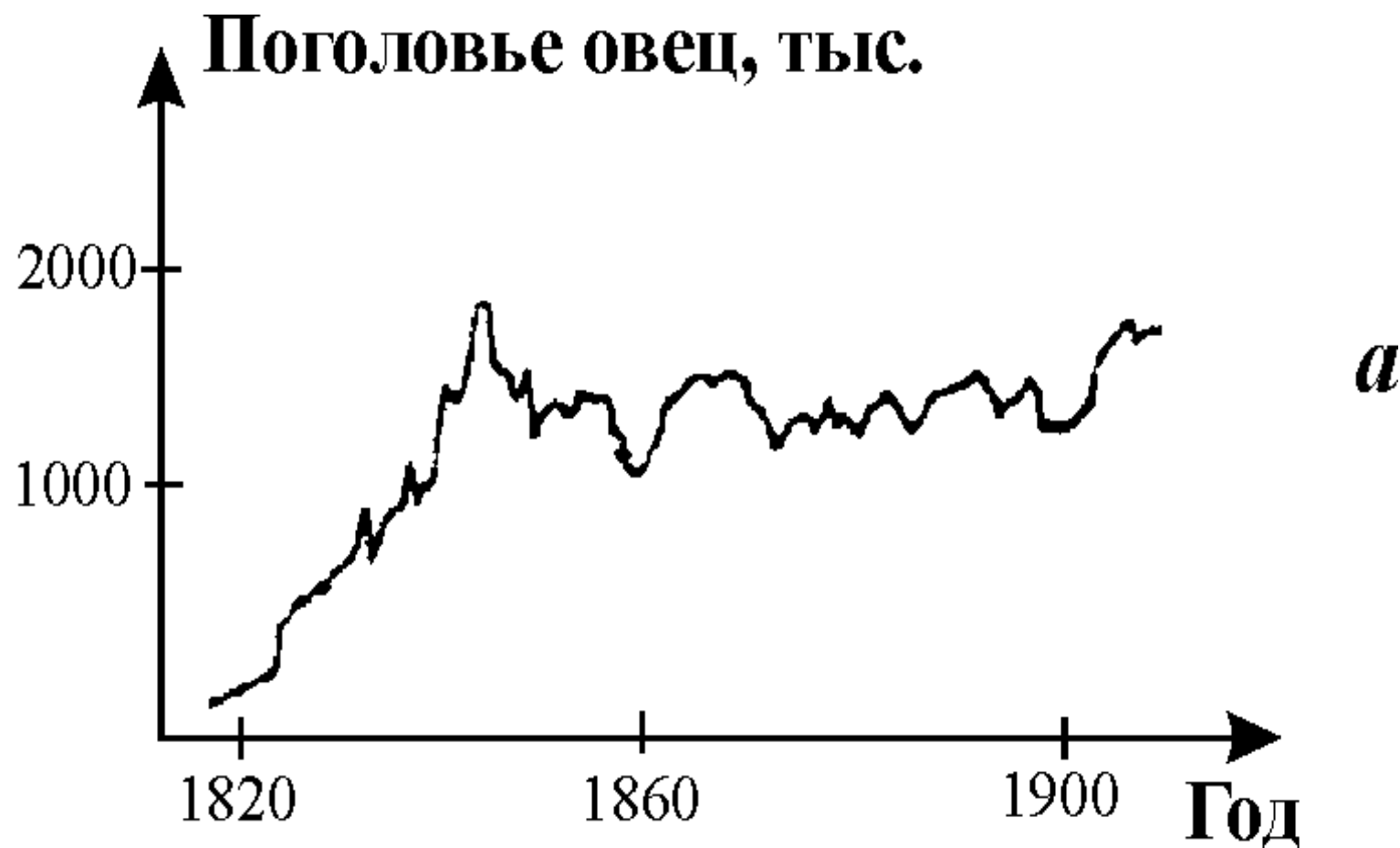
## Задание

Привести (из своей области) примеры процессов, которые могут быть описаны кривой с насыщением. Взаимодействие каких процессов более низкого уровня приводит к насыщению?

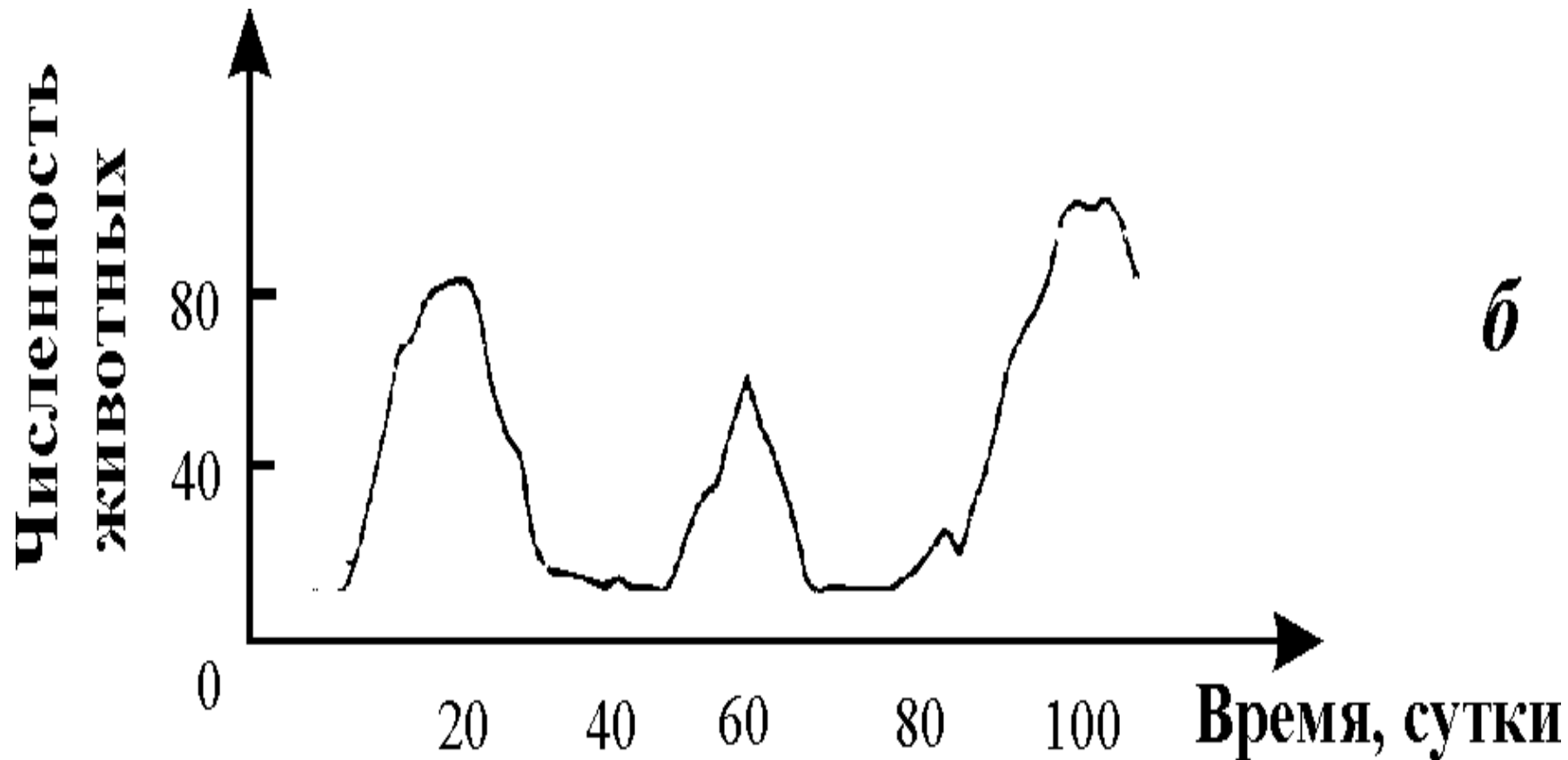
# Динамика численности популяции

- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

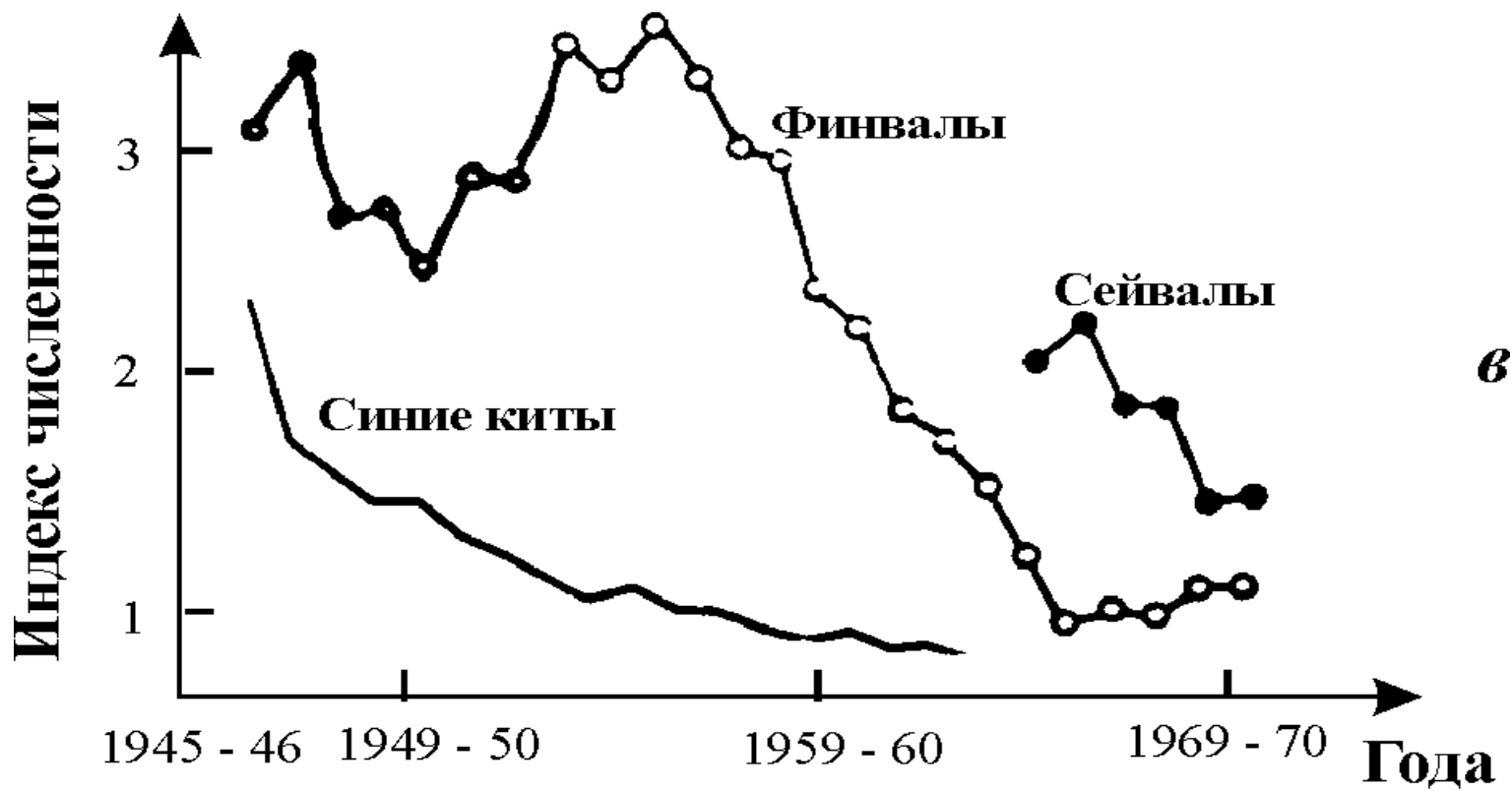
# Численность поголовья овец на острове Тасмания (*Davidson, 1938*)



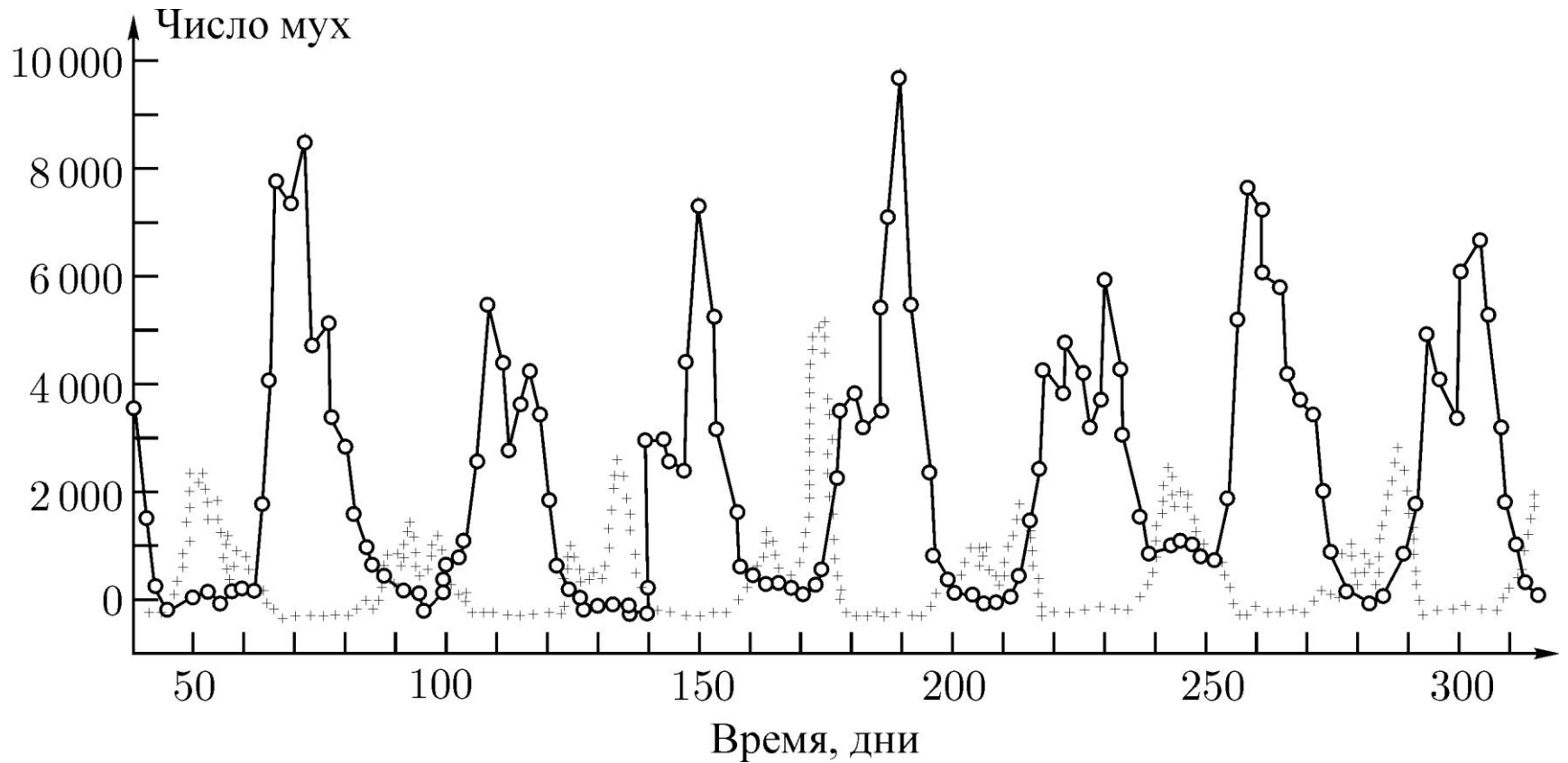
Изменение численности  
*Daphnia magna* (Frall, 1943)



Динамика численности трех видов китов в Антарктике  
(приведена по изменению «индекса численности» убитых  
КИТОВ  
на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland, 1971*)



Численность мух *Lucilia* в популяционном ящике (Nicholson, 1954) 1 –  
взрослые особи. Крестики – число яиц, отложенных за один день



# Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

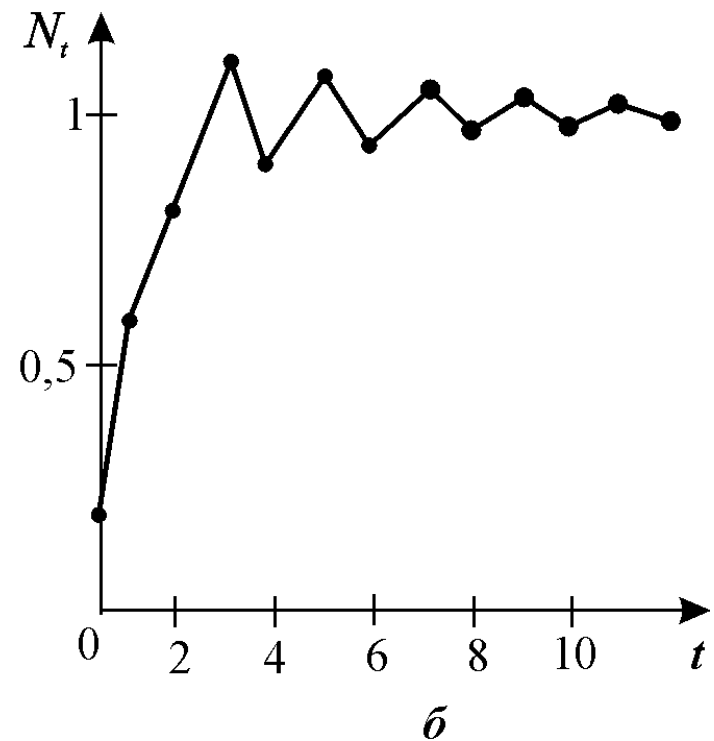
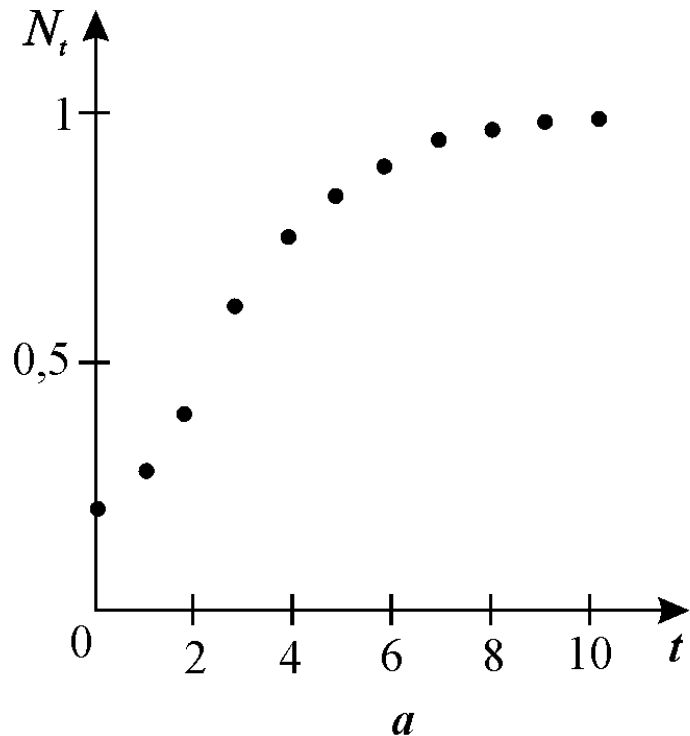
- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов



# Дискретные модели популяций

Монотонный и немонотонный рост  
Колебания  
хаос

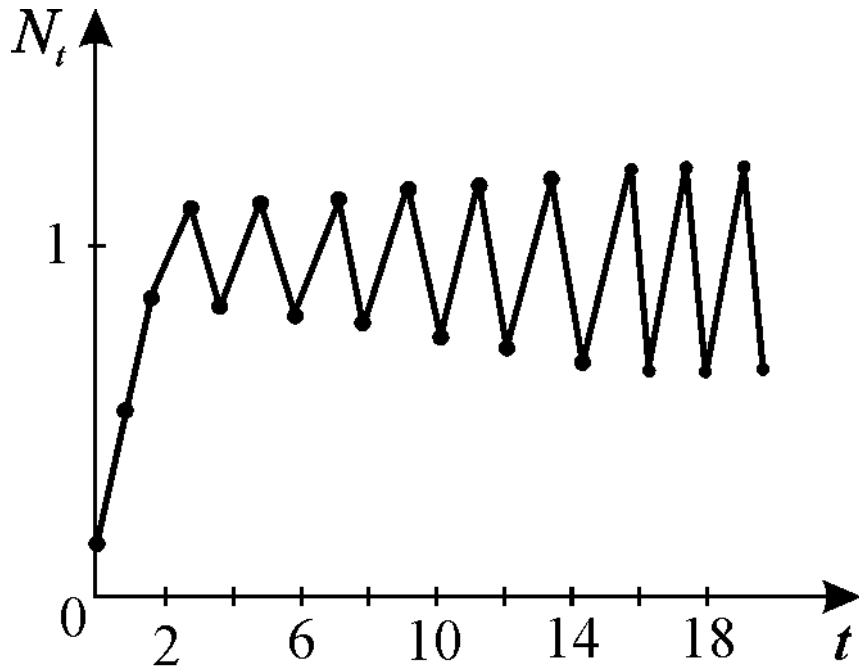
*Равновесие устойчиво, если  $0 < r < 2$ ,  
решение монотонно при  $0 < r < 1$  и представляет собой  
затухающие колебания при  $1 < r < 2$ .*



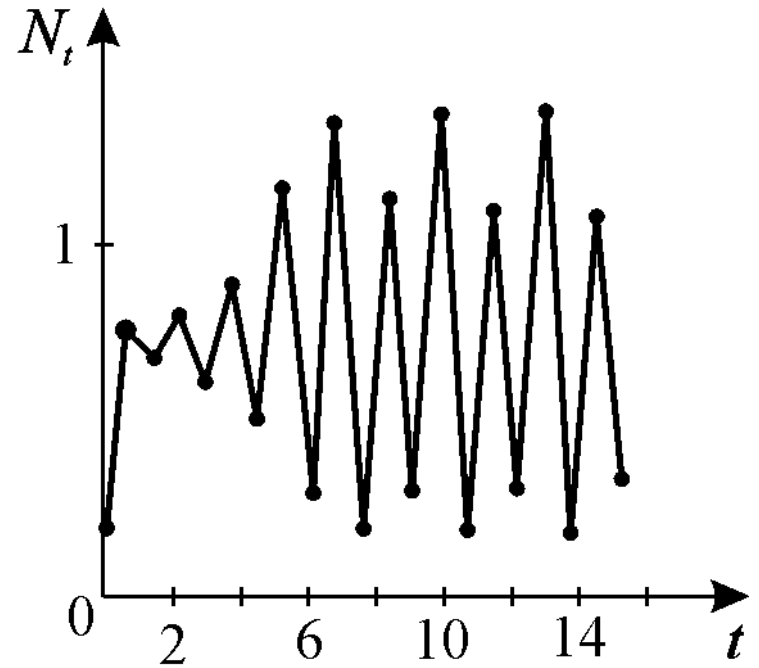
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

при  $2 < r = r_2 < 2,526$  – двухточечные циклы

при  $r_2 < r < r_c$  появляются циклы длины  $4, 8, 16, \dots, 2k$ .



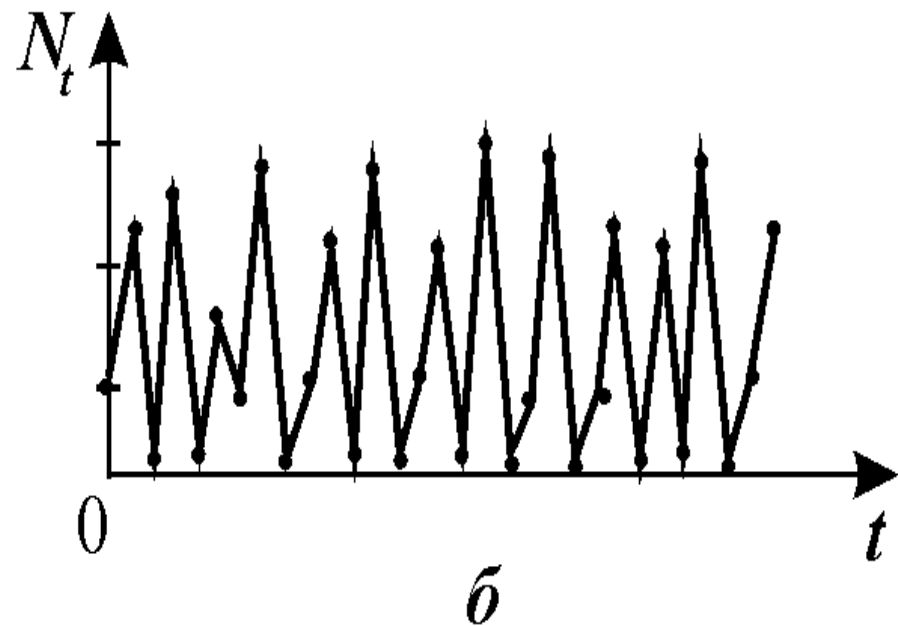
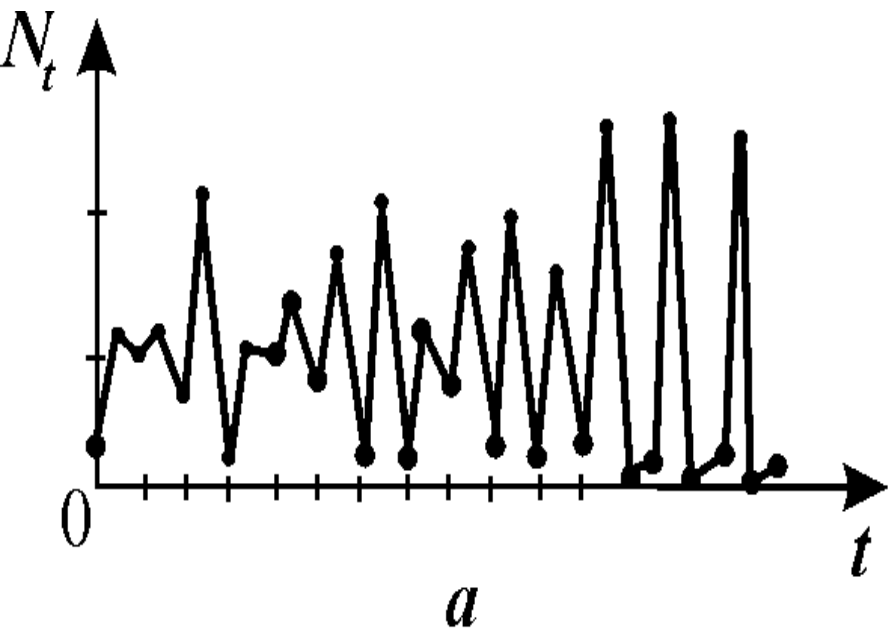
*a*



*b*

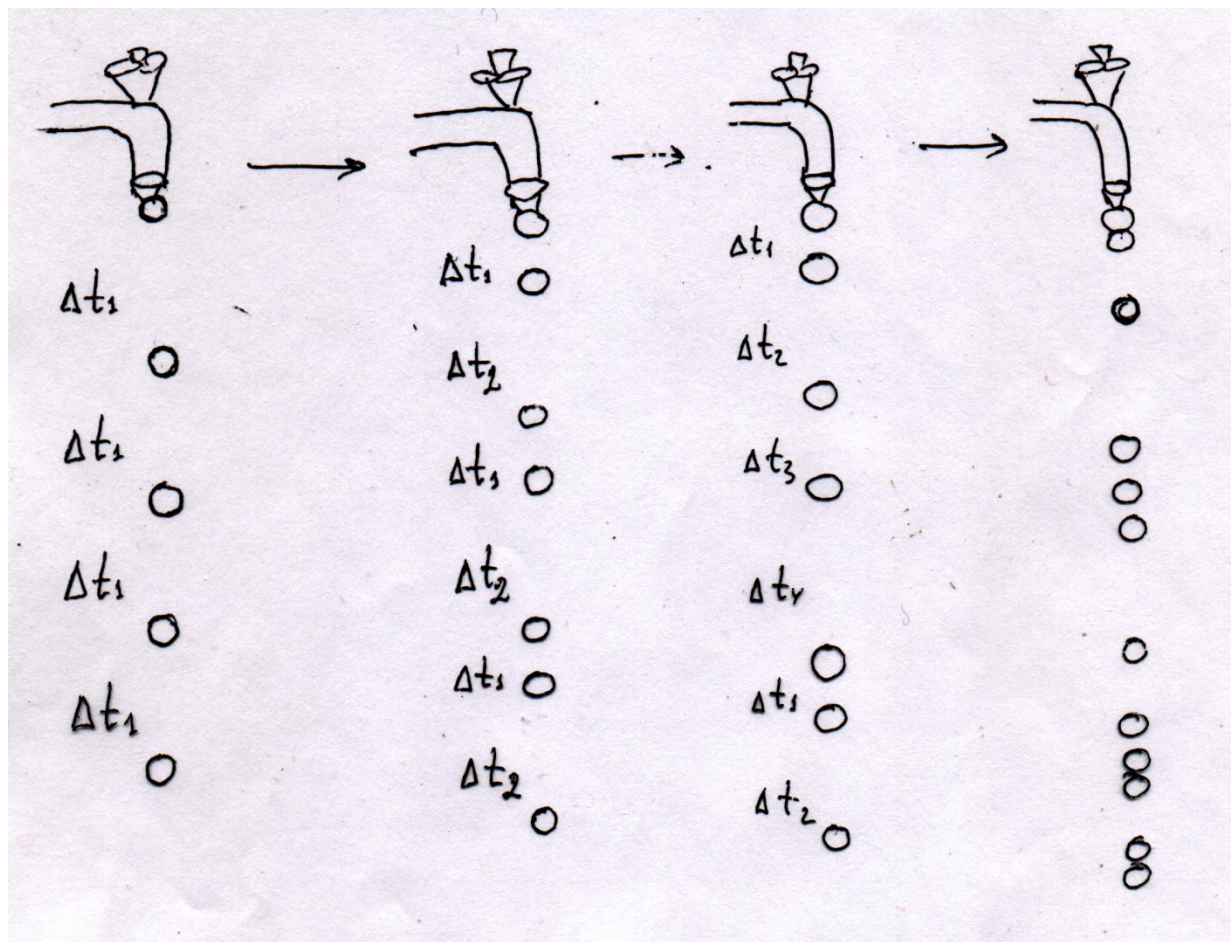
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

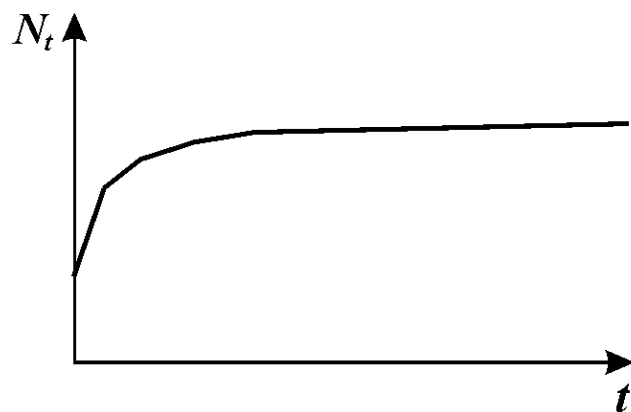
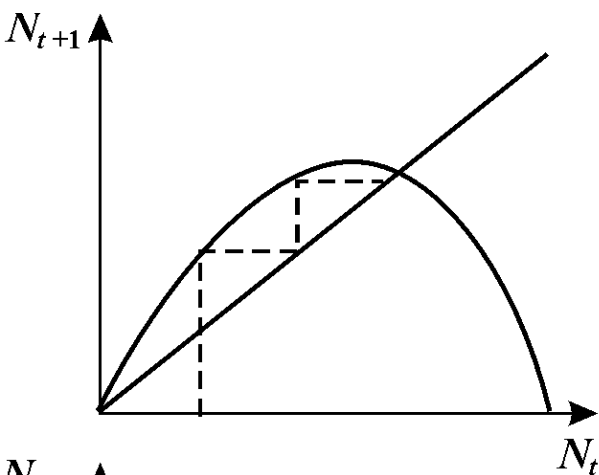
При  $r > r_c = 3,102$  решение зависит от начальных условий.  
Существуют *трехточечные циклы* и  
*квазистохастические решения*.



$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

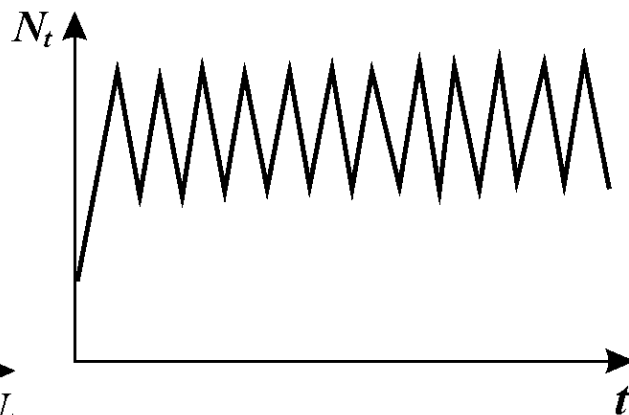
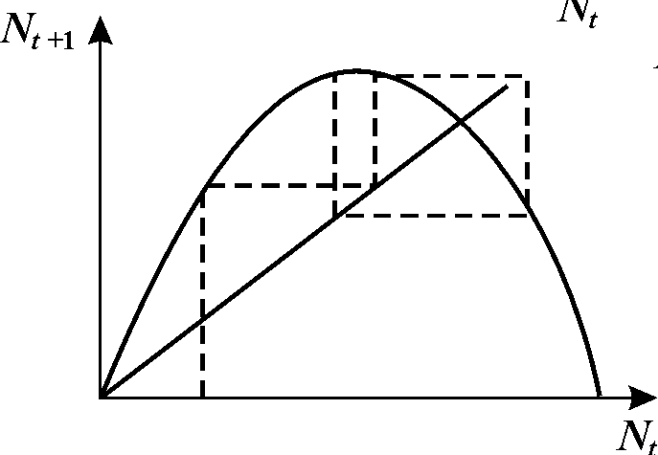
# Переход к хаосу через удвоение периода



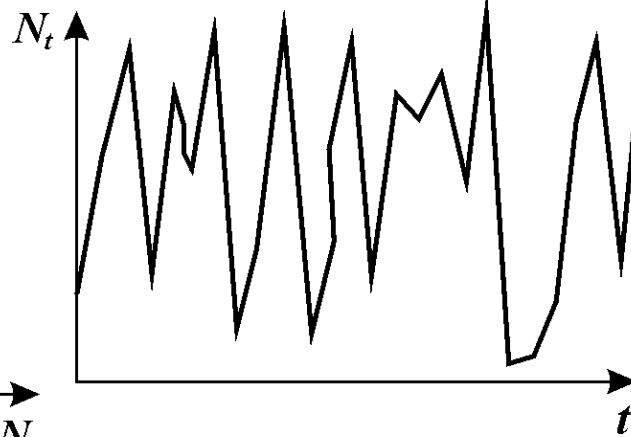
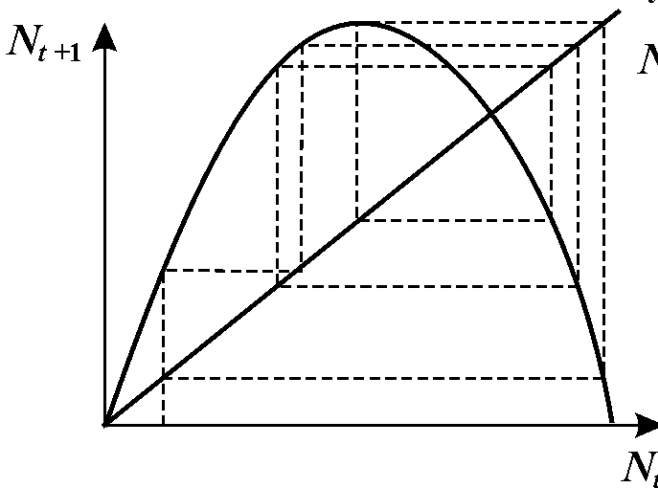


*a* Квадратичное отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$



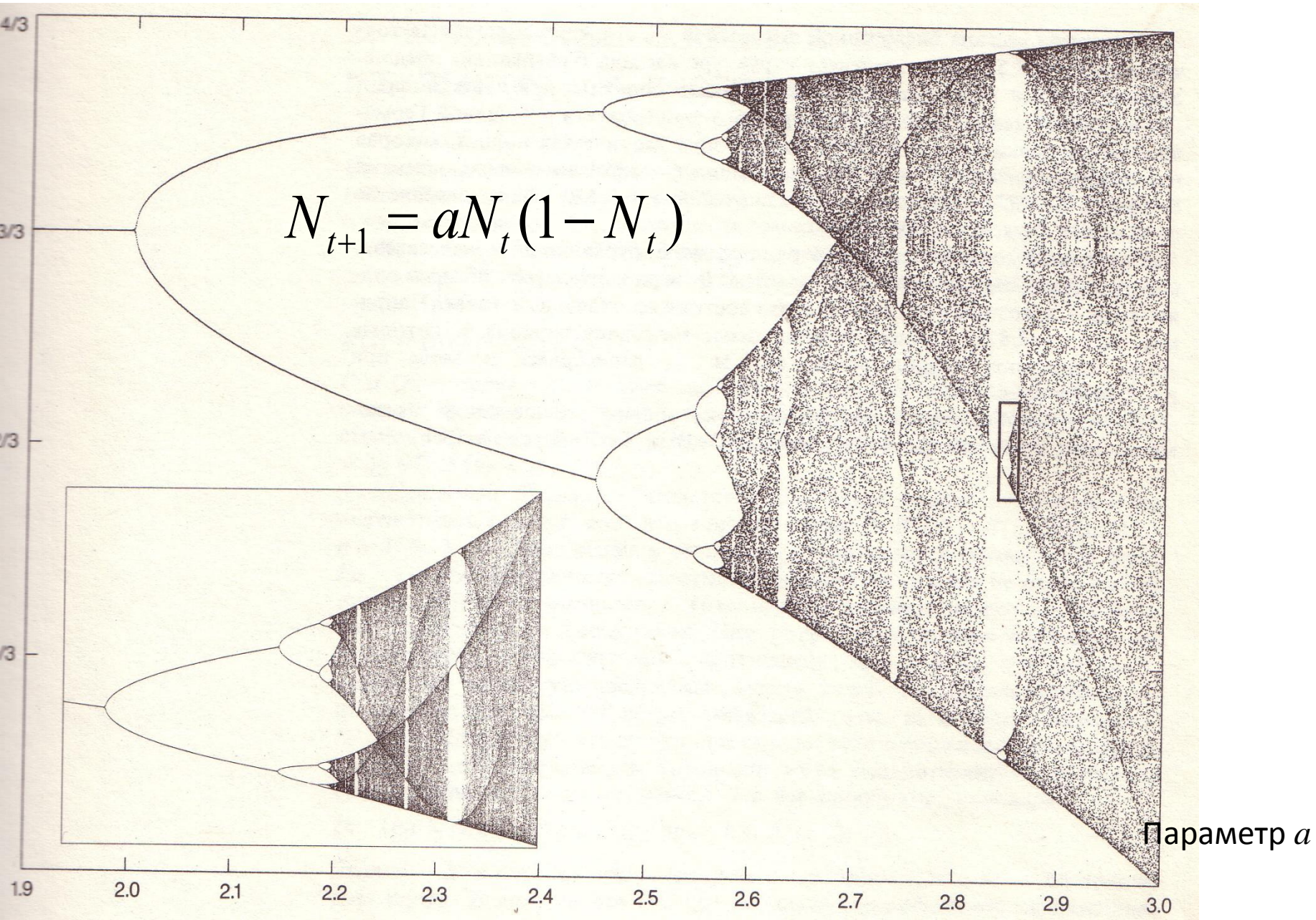
*б*



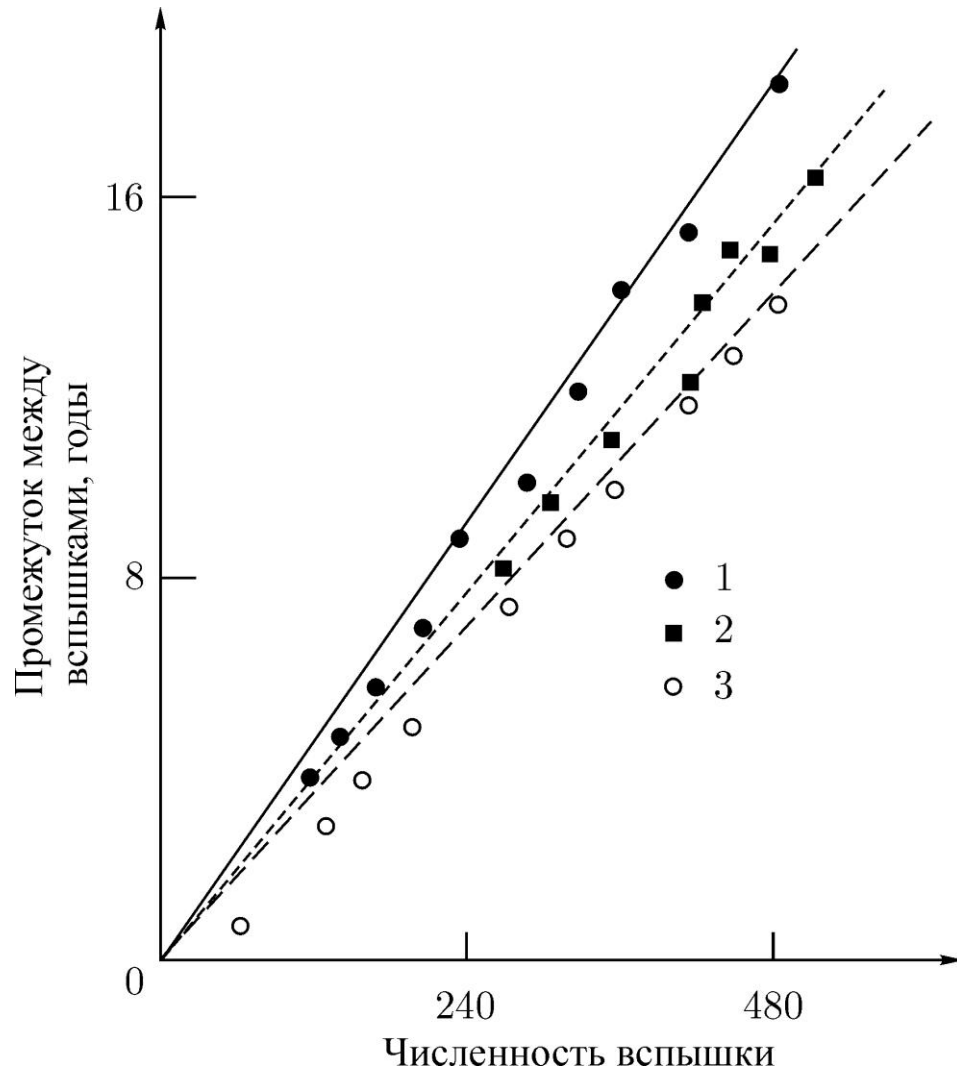
*в*



Бифуркационная диаграмма перехода к хаосу через удвоение периода

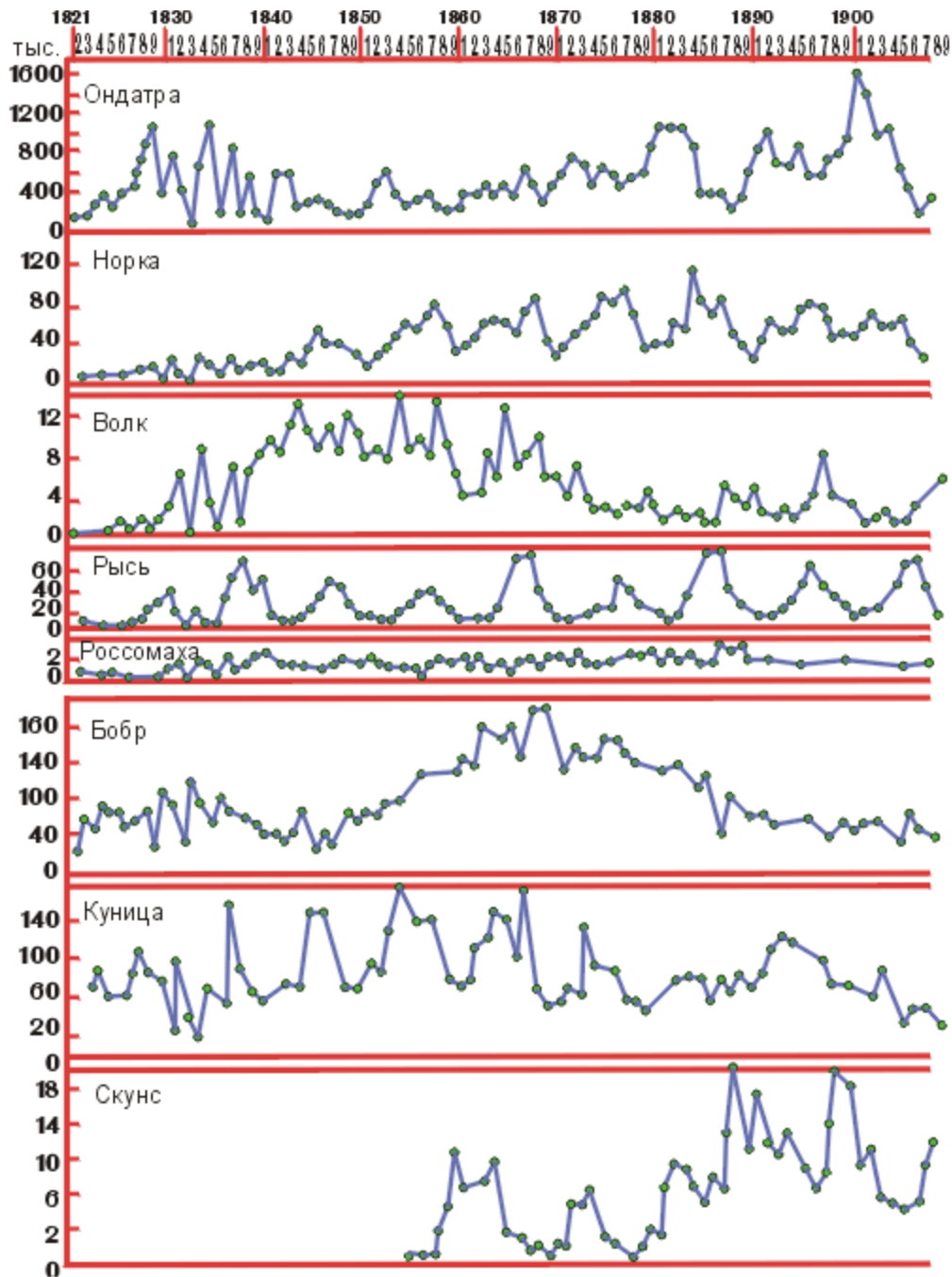


Если функция  $F(N)$  имеет один экстремум и точку перегиба на падающей части, то чем больше амплитуда вспышки, тем длительнее интервал малых численностей популяции



Vandermeer, 1982





Кинетические кривые численности пушных зверей по данным компании Гудзонова залива. (Сетон-Томсон, Торонто, 1911)

# Задание

## Задание 1

Примеры моделей в Вашей науке

Как можно их классифицировать?

Привести примеры базовых и имитационных моделей

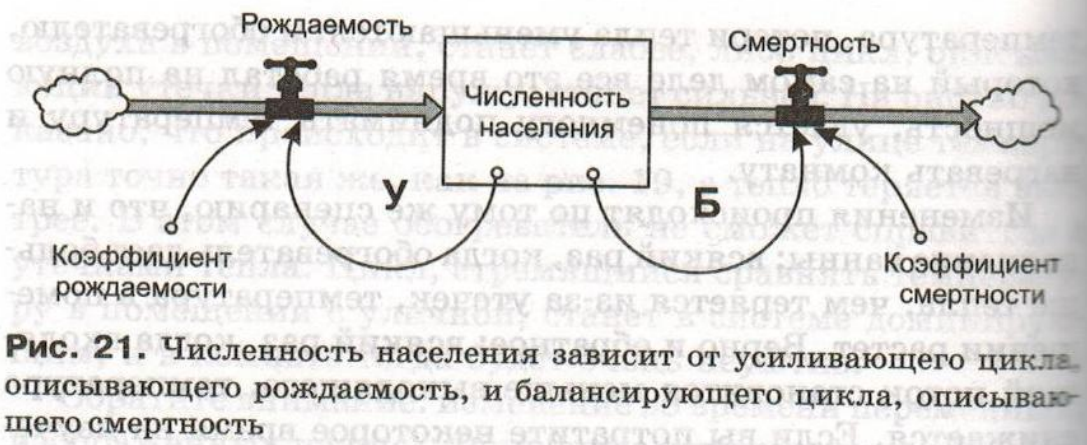
## Задание 2

Какие задачи из разных областей науки могут быть сформулированы как задача роста популяции ?

# Схемы роста в терминах системного анализа

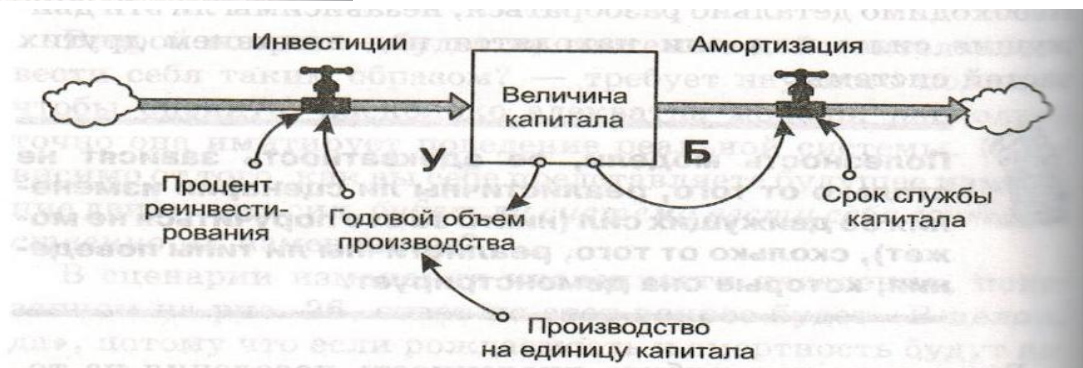
80

Часть I. Системные структуры и поведение



**Рис. 21.** Численность населения зависит от усиливающего цикла, описывающего рождаемость, и балансирующего цикла, описывающего смертность

Чем больше величина физического капитала (оборудование и заводы) и чем выше эффективность производства (объем производства на единицу капитала), тем больше годовой выход продукции



**Рис. 27.** Как и в структуре с численностью населения, экономический капитал зависит от усиливающего цикла, ответственного за рост (инвестиции в виде доли от годового объема производства), и балансирующего цикла, ответственного за снижение капитала (амортизация)